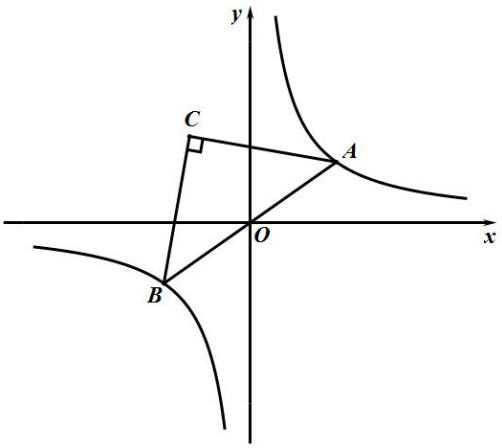
几何最值之瓜豆原理巩固练习

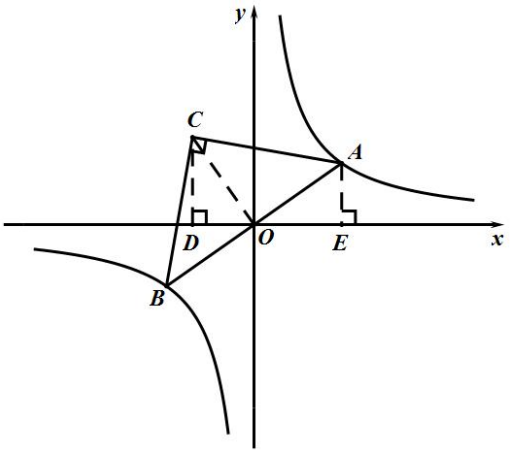
1. 点 A 是双曲线 $y=\frac{4}{x}$ 在第一象限上的一个动点，连接 AO 并延长交另一交令一分支点 B，以 AB 为斜边作等腰 $Rt\triangle ABC$，点 C 在第二象限，随着点 A 的运动，点 C 的位置也在不断变化，但始终在某函数图像上运动，则这个函数的解析式为_____.



【分析】动点 C 可看作是由主动点 A 绕着原点 O 逆时针旋转 90°得到的，所说点 C 所在的图像必然也是双曲线.

【解答】$y=-\frac{4}{x}$

【解析】连接 OC，作 $CD\perp x$ 轴于点 D，$AE\perp x$ 轴于点 E，如图所示：



设点 A 的坐标为 $\left(a,\frac{4}{a}\right)$，$\because A$、$B$ 两点是正比例函数图像与反比例函数图像的交点，

$\therefore$ 点 A 与点 B 关于原点对称，$\therefore OA=OB$，

$\because \triangle ABC$ 为等腰直角三角形，$\therefore OC=OA$，$OC\perp OA$，

$\therefore \angle DOC+\angle AOE=90^{\circ}$，

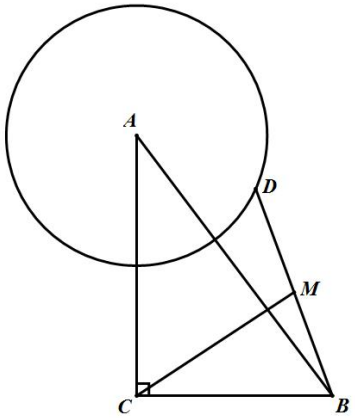
$\because \angle DOC+\angle DCO=90^{\circ}$，$\therefore \angle DCO=\angle AOE$，

在△COD与△OAE中，$\begin{cases}\angle CDO=\angle OEA\\ \angle DCO=\angle EOA\\ CO=OA\end{cases}$，$\therefore$△$COD$≌△$OAE$（$AAS$），

$\therefore OD=AE=\frac{4}{a},CD=OE=a,\therefore C\left(-\frac{4}{a},a\right)$，

$\because -\frac{4}{a}\cdot a=-4$，$\therefore$点$C$在反比例函数$y=-\frac{4}{x}$的图像上.

2. 如图，在Rt△ABC中，$\angle ACB=90°$，$AC=8$，$BC=6$，点D是以A为圆心，4为半径的圆上一点，连接BD，M为BD的中点，则线段CM的长度的最大值为_____.

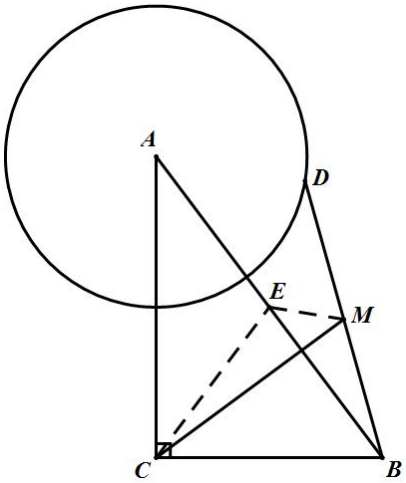


【分析】本题即可用中点模型处理（详见本专辑的专题02中点模型），也可以用瓜豆原理得到点M的轨迹，将问题转化为点到圆的距离问题，然后求解.

【解答】7

【解析】法一、中点模型

取AB的中点E，连接EM、CE，如图所示：



在Rt△ABC中，$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$，

∵E 是 $Rt\triangle ABC$ 斜边上的中点，∴$CE=5$，

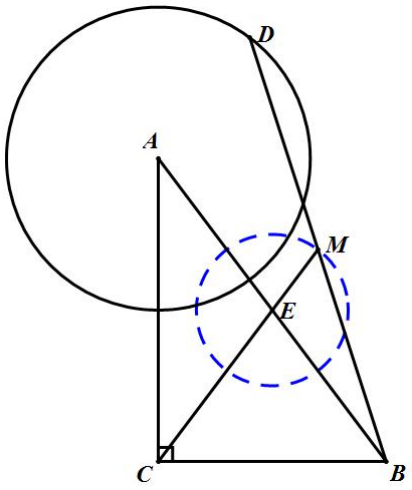
∵M 是 BD 的中点，E 是 AB 的中点，∴$ME=\frac{1}{2}AD=2$，

∴在$\triangle CEM$ 中，$5-2\leqslant CM\leqslant 5+2$，即$3\leqslant CM\leqslant 7$，

∴CM 的长度最大值为 7.

法二、瓜豆原理

由 M 为 BD 的中点，结合瓜豆原理内容可得点 M 的轨迹是一个圆，如图所示，M 点的轨迹就是由圆 A 以定点 B 为位似中心，以 $\frac{1}{2}$ 为位似比缩小来的.

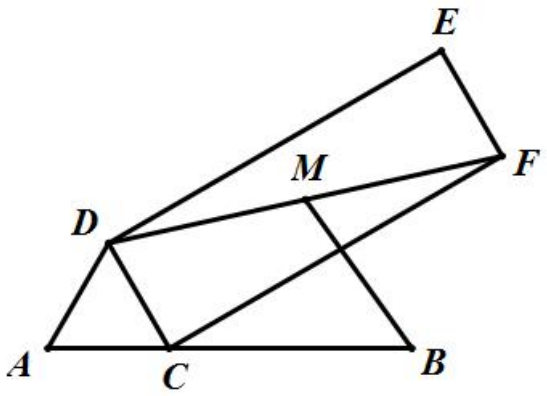


∴圆 E 的半径为 2，

当 C、E、M 三点共线时，CM 的长度最大，

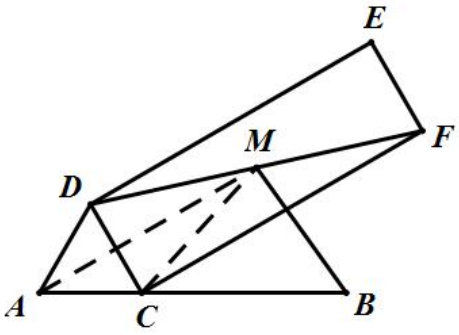
∵E 是 $Rt\triangle ABC$ 斜边的中点，∴$CE=5$，∴$CM=CE+EM=5+2=7$.

3. 如图，已知线段 $AB=12$，点 C 在线段 AB 上，且$\triangle ACD$ 是边长为 4 的等边三角形，以 CD 为边的右侧作矩形 $CDEF$，连接 DF，点 M 是 DF 的中点，连接 MB，则线段 MB 的最小值为_____.



【解答】6

【解析】法一、连接 AM、CM，如图所示：



∵△*ACD* 为等边三角形，∴*AC*＝*AD*，∠*DAC*＝60°，

∵四边形 *DCFE* 是矩形，点 *M* 是 *DF* 的中点，∴*DM*＝*CM*，

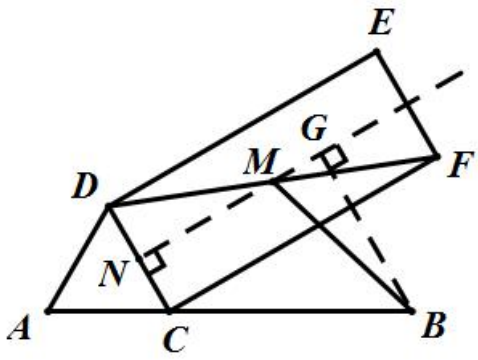
在△*ADM* 与△*ACM* 中，$\begin{cases} AD=AC \\ DM=CM \\ AM=AM \end{cases}$，∴△*ADM*≌△*ACM*（*SSS*），

∴∠*DAM*＝∠*CAM*，

∵∠*DAC*＝60°，∴∠*ACM*＝30°，∴当 *BM*⊥*AM* 时，*MB* 有最小值，

此时 $BM=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 12=6$.

法二、如图所示



∵∠*FCB*＝30°，∴*F* 的路径是定射线 *DF*，

又∵点 *M* 是 *DF* 的中点，∴$DM=\frac{1}{2}DF$ ，

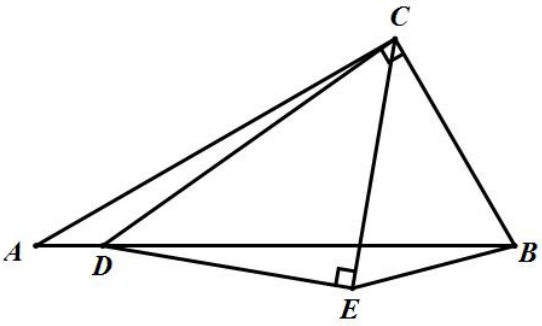
∵*D* 点为定点，*F* 点为主动点，*M* 点为从动点，由瓜豆原理内容可知 *M* 点的路径亦是一条射线，

取 *CD* 的中点 *N*，连接 *NM* 并延长，则射线 *NM* 就是 *M* 点的路径，且 *NM*∥*CF*，

作 *BG*⊥*NM* 于点 *G*，交 *CF* 于点 *H*，则 *BG*⊥*CF*，故 *BG*＝*BH*＋*HG*＝*BH*＋*CN*＝4＋2＝6，

∴线段 *BM* 的最小值即为 *BG*，最小值为 6.

4. 如图，在△*ABC* 中，∠*ACB*＝90°，∠*A*＝30°，*BC*＝2，*D* 是 *AB* 上一动点，以 *DC* 为斜边向右侧作等腰 *Rt*△*DCE*，使∠*CED*＝90°，连接 *BE*，则线段 *BE* 的最小值为_____.



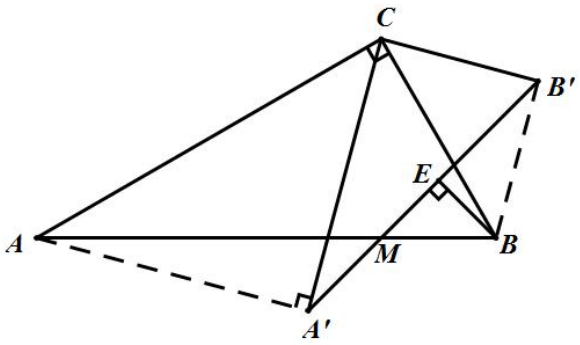
【解答】$\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】由题意可知 C 为定点，D 点为主动点，路径为线段 AB，点 E 为从动点，

∵△DCE 是等腰直角三角形，∴∠DCE=45°，$\frac{EC}{DC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

结合瓜豆原理内容可知从动点 E 的路径为一条线段，可以看成是由线段 AB 先绕着定点 C 逆时针旋转 45°，

再以定点 C 为位似中心，以 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 为位似比缩小来的，



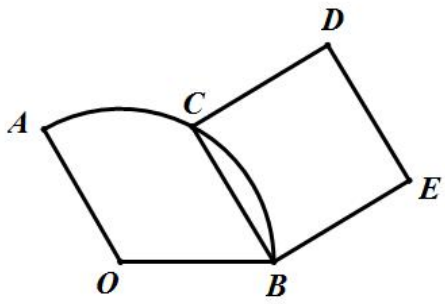
如图，将 BE 的最小距离转化为点到线的最小距离（点 B 到 $A'B'$ 的最短距离），

由旋转相似可得 $Rt\triangle ACB\backsim Rt\triangle A'CB'$，$\therefore\angle CB'A'=\angle CBA=60°$，

$\therefore\angle AB'B=30°$，在 $Rt\triangle B'EB$ 中，有 $B'B=\sqrt{2}$，则 $BE=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

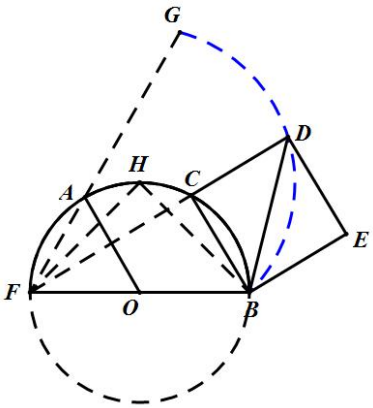
∴线段 BE 的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. 如图，已知在扇形 AOB 中，OA=3，∠AOB=120°，C 是在 $\overset{\frown}{AB}$ 上的动点，以 BC 为边作正方形 $BCDE$，当点 C 从点 A 移动至点 B 时，求点 D 运动的路径长？



【解答】$2\sqrt{2}\pi$

【解析】将圆 O 补充完整，延长 BO 交圆 O 于点 F，取 $\overset{\frown}{BF}$ 的中点 H，连接 FH、HB、BD，如图所示：



由题意可得△FHB 是等腰直角三角形，$HF=HB$，$\angle FHB=90°$，

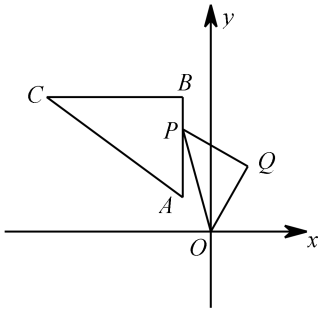
$\because \angle FDB=45°=\frac{1}{2}\angle FHB$，$\therefore$ 点 D 在圆 H 上运动，轨迹如图中蓝色虚线，

$\therefore \angle HFG=\angle HCF=15°$，$\therefore \angle FHG=150°$，

$\therefore \angle CHB=120°$，$\therefore HB=3\sqrt{2}$，

$\therefore$ 点 D 的运动路径长度为 $\frac{120\cdot\pi\cdot 3\sqrt{2}}{180}=2\sqrt{2}\pi$.

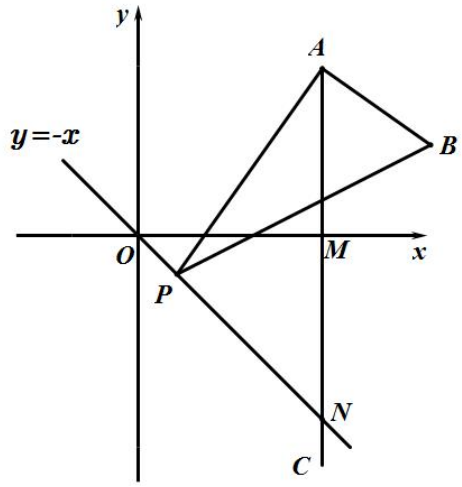
6. 如图，A（−1，1），B（−1，4），C（−5，4），点 P 是△ABC 边上一动点，连接 OP，以 OP 为斜边在 OP 的右上方作等腰直角△OPQ，当点 P 在△ABC 边上运动一周时，求点 Q 的轨迹形成的封闭图形面积是多少？



【解答】3

【解析】根据△*OPQ* 是等腰直角三角形可得：*Q* 点运动轨迹与 *P* 点轨迹形状相同，根据 *OP*:*OQ*=$\sqrt{2}:1$，可得 *P* 点轨迹图形与 *Q* 点轨迹图形相似比为 $\sqrt{2}:1$，故面积比为 2:1，△*ABC* 面积为 1/2×3×4=6，故 *Q* 点轨迹形成的封闭图形面积为 3．

7. 如图，已知点 *A* 是第一象限内横坐标为$2\sqrt{3}$ 的一个定点，$AC\perp x$ 轴于点 *M*，交直线 $y=-x$ 于点 *N*，若点 *P* 是线段 *ON* 上的一个动点，∠*APB*=30°，*BA*⊥*PA*，则点 *P* 在线段 *ON* 上运动时，*A* 点不变，*B* 点随之运动，求当点 *P* 从点 *O* 运动到点 *N* 时，求点 *B* 的运动路径长？



【解答】$2\sqrt{2}$

【解析】由题意可知$OM=2\sqrt{3}$，点 *N* 在直线 $y=-x$ 上，$AC\perp x$ 于点 *M*，则△*OMN* 是等腰直角三角形，$\therefore ON=\sqrt{2}OM=\sqrt{2}\times 2\sqrt{3}=2\sqrt{6}$，

如图 1，设动点 *P* 在 *O* 点（起点）时 ，点 *B* 的位置为B_0，动点 *P* 在 *N* 点（终点）时，点 *B* 的位置为B_n，连接B_0B_n，

$\because AO\perp AB_0, AN\perp AB_n, \therefore \angle OAC=\angle B_0A_0B_n$，

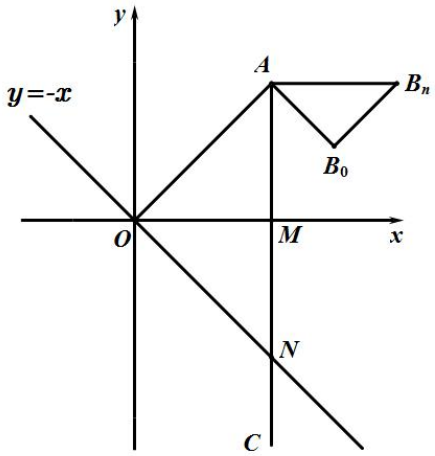


图1

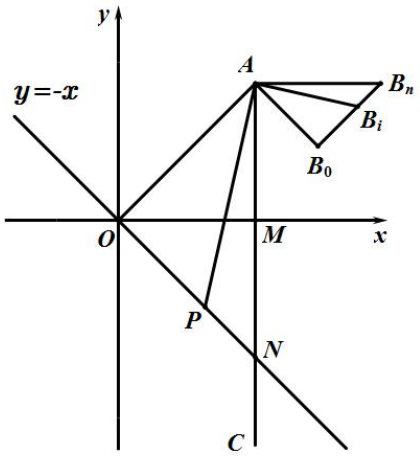


图2

又∵ $AB_0=AO\cdot\tan30°, AB_n=AN\cdot\tan30°$, ∴ $AB_0:AO=AB_n:AN=\tan30°$，

∴ $\triangle AB_0B_n\backsim\triangle AON$，相似比为$\tan30°$，

∴ $B_0B_n=ON\cdot\tan30°=2\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{2}$，

如图 2，当点 P 运动至 ON 上任意一点时，设其对应的点 B 为B_i，连接 AP、AB_i、B_0B_i，

∵ $AO\perp AB_0, AP\perp AB_i$, ∴ $\angle OAP=\angle B_0AB_i$，

∵ $AB_0=AO\cdot\tan30°, AB_i=AP\cdot\tan30°$, ∴ $AB_0:AO=AB_i:AP$，

∴ $\triangle AB_0B_i\backsim\triangle AOP$，∴ $\angle AB_0B_i=\angle AOP$，

又∵ $\triangle AB_0B_n\backsim\triangle AON$，∴ $\angle AB_0B_n=\angle AOP$, ∴ $\angle AB_0B_i=\angle AB_0B_n$，

∴点B_i在线段B_0B_n上，即线段B_0B_n就是点 B 运动的路径，

综上所述，点 B 运动的路径是线段B_0B_n，其长度为$2\sqrt{2}$.