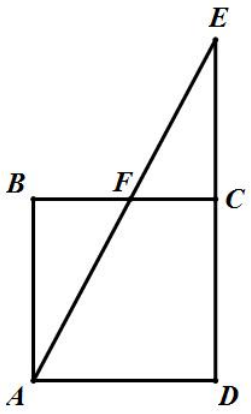
几何最值之瓜豆原理巩固练习（基础）

1. 如图，$ABCD$ 是正方形场地，点 E 在 DC 的延长线上，AE 与 BC 相交于点 F，有甲、乙、丙三名同学同时从点 A 出发，甲沿着 $A-B-F-C$ 的路径行走至 C，乙沿着 $A-F-E-C-D$ 的路径行走至 D，丙沿着 $A-F-C-D$ 的路径行走至 D，若三名同学行走的速度都相同，则他们到达各自的目的地的先后顺序（由先至后）是（　　）



A．甲乙丙　　B．甲丙乙　　C．乙丙甲　　D．丙甲乙

【解答】B

【解析】∵四边形 $ABCD$ 是正方形，∴$AB=BC=CD=AD$，$\angle B=90°$，

甲行走的距离是 $AB+BF+CF=AB+BC=2AB$；

乙行走的距离是 $AF+EF+EC+CD$；

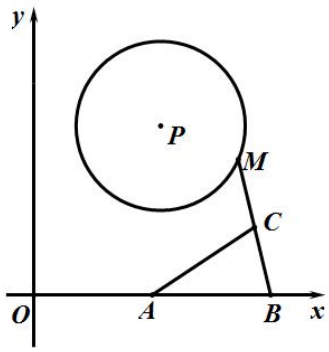
丙行走的距离是 $AF+FC+CD$，

∵$\angle B=\angle ECF=90°$，∴$AF>AB$，$EF>CF$，

∴$AF+FC+CD>2AB$，$AF+FC+CD<AF+EF+EC+CD$，

∴甲比丙先到，丙比乙先到，即顺序是甲丙乙，故选 B.

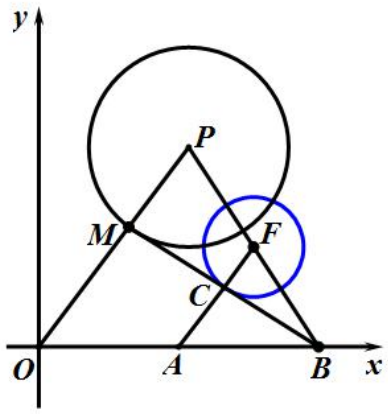
2. 如图，点 P（3，4），圆 P 半径为 2，A（2.8，0），B（5.6，0），点 M 是圆 P 上的动点，点 C 是 MB 的中点，则 AC 的最小值是_____.



【解答】1.5

【解析】由题意可知 M 点为主动点，C 点为从动点，B 点为定点.

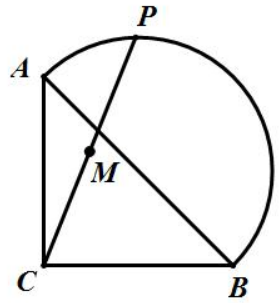
∵C 是 BM 中点，可知 C 点轨迹为取 BP 中点 F，以 F 为圆心，FC 为半径作圆，即为点 C 轨迹，如图所示：



由题中数据可知 $OP=5$，又∵点 A、F 分别是 OB、BP 的中点，∴AF 是△BPO 的中位线，∴$AF=2.5$，

当 M 运动到如图位置时，AC 的值最小，此时 A、C、O 三点共线，∴$AC=2.5-1=1.5$.

3. 如图，在等腰 $Rt\triangle ABC$ 中，$AC=BC=2\sqrt{2}$，点 P 在以斜边 AB 为直径的半圆上，M 为 PC 的中点，当半圆从点 A 运动至点 B 时，点 M 运动的路径长为_____.

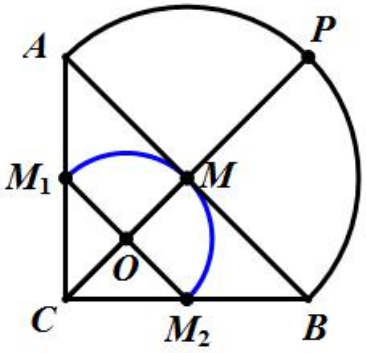


【解答】π

【解析】当点 P 位于弧 AB 的中点时，M 为 AB 的中点，

∵$AC=BC=2\sqrt{2}$，∴$AB=4$，$CM=2$，

设 M_1，M_2 分别为 AC、BC 的中点，连接 M_1M_2 交 CP 于点 O，如图所示：

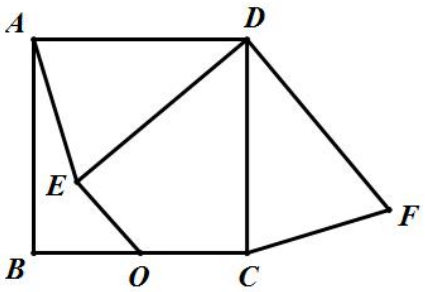


∵$M_1M_2=2, OM_1=OM_2=OC=OM=1$，

当点 P 沿半圆从点 A 运动至点 B 时 ，点 M 的运动路径是以 O 为圆心，1 为半径的半圆，如图蓝色半圆，

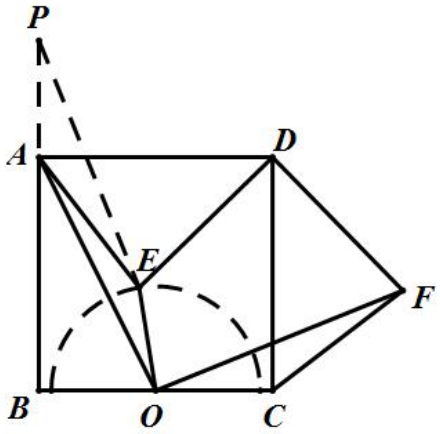
∴点 M 的运动路径长为 π .

4. 如图，正方形 $ABCD$ 中，$AB=2\sqrt{5}$，O 是 BC 边的中点，点 E 是正方形内一动点，$OE=2$，连接 DE，将线段 DE 绕点 D 逆时针旋转 90°得 DF，连接 AE、CF．求线段 OF 长的最小值．



【解答】$5\sqrt{2}-2$

【解析】法一、∵$OE=2$，∴点 E 可以看成是在以 O 为圆心，2 为半径的半圆上运动，延长 BA 至点 P，使得 $AP=OC$，连接 PE，如图所示：



∵$AE=CF$，$\angle PAE=\angle OCF$，∴$\triangle PAE\cong\triangle OCF$，∴$PE=OF$，

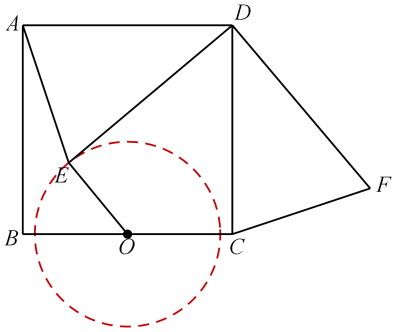
当 O、E、P 三点共线时，PE 的值最小，

$\because OP=\sqrt{OB^2+PB^2}=\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2+\left(3\sqrt{5}\right)^2}=5\sqrt{2}$，

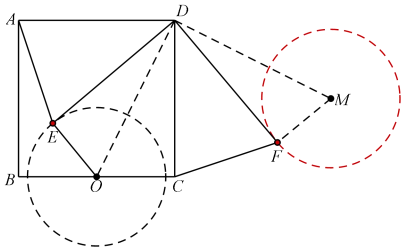
$\therefore PE=OF=OP-OE=5\sqrt{2}-2$，

$\therefore OF$ 的最小值是$5\sqrt{2}-2$.

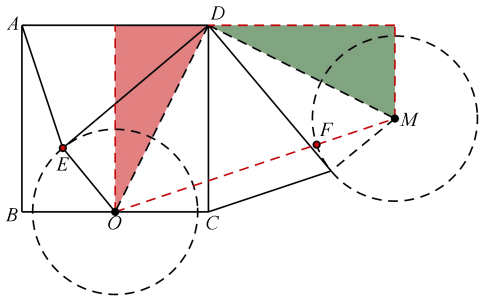
法二、E 是主动点，F 是从动点，D 是定点，E 点满足 $EO=2$，故 E 点轨迹是以 O 为圆心，2 为半径的圆.



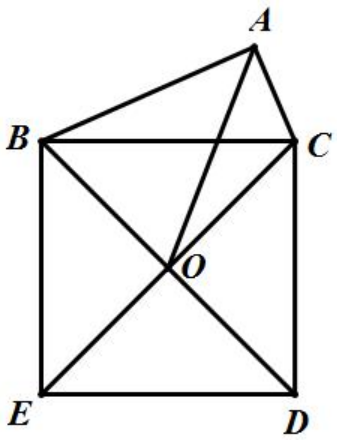
考虑 $DE\perp DF$ 且 $DE=DF$，故作 $DM\perp DO$ 且 $DM=DO$，F 点轨迹是以点 M 为圆心，2 为半径的圆.



直接连接 OM，与圆 M 交点即为 F 点，此时 OF 最小. 可构造三垂直全等求线段长，再利用勾股定理求得 OM，减去 MF 即可得到 OF 的最小值.

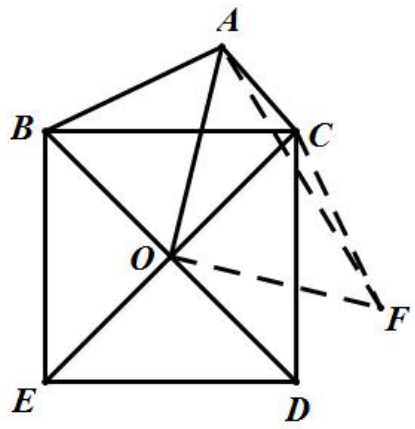


5. $\triangle ABC$ 中，$AB=4$，$AC=2$，以 BC 为边在$\triangle ABC$ 外作正方形 $BCDE$，BD、CE 交于点 O，则线段 AO 的最大值为_____.



【解答】$3\sqrt{2}$

【解析】如图，以 AO 为直角边作等腰直角三角形 AOF，且$\angle AOF=90°$，则 $AO=FO$，$AF=\sqrt{2}AO$，



∵四边形 $BCDE$ 是正方形，∴$BO=CO$，$\angle BOC=90°$，

∵$\angle BOC=\angle AOF=90°$，∴$\angle AOB=\angle COF$，∴$\triangle AOB\cong\triangle FOC$，∴$CF=AB=4$，

若点 A、C、F 三点不共线时 ，$AF<AC+CF$，

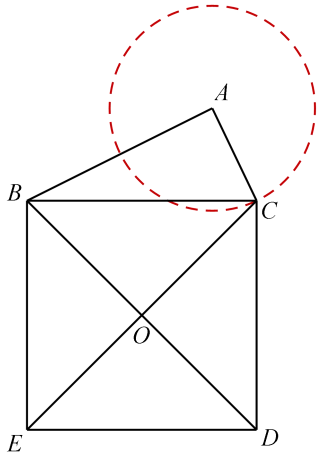
若点 A、C、F 三点共线时，$AF=AC+CF$，

∴$AF\leqslant AC+CF=2+4=6$，∴AF 的最大值是 6，

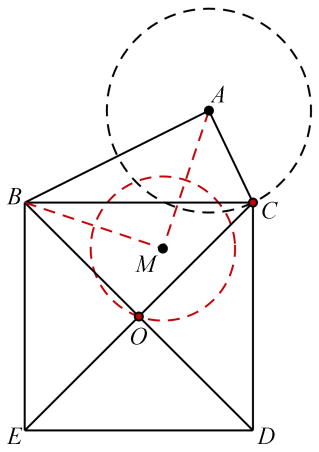
∵$AF=\sqrt{2}AO$，∴AO 的最大值是$3\sqrt{2}$；

法二、考虑到 AB、AC 均为定值，可以固定其中一个，比如固定 AB，将 AC 看成动线段，由此引发正方形 $BCED$ 的变化，求得线段 AO 的最大值．

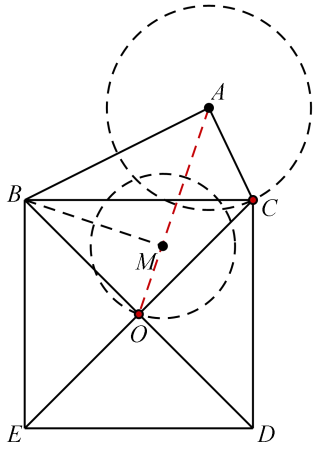
根据 $AC=2$，可得 C 点轨迹是以点 A 为圆心，2 为半径的圆．



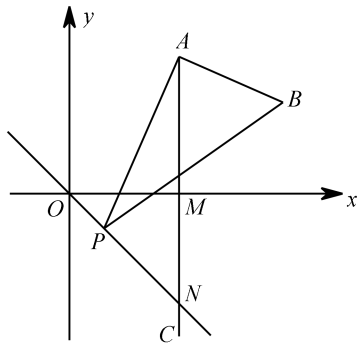
接下来题目求 AO 的最大值，所以确定 O 点轨迹即可，观察$\triangle BOC$ 是等腰直角三角形，锐角顶点 C 的轨迹是以点 A 为圆心，2 为半径的圆，所以 O 点轨迹也是圆，以 AB 为斜边构造等腰直角三角形，直角顶点 M 即为点 O 轨迹圆圆心.



连接 AM 并延长与圆 M 交点即为所求的点 O，此时 AO 最大，根据 AB 先求 AM，再根据 BC 与 BO 的比值可得圆 M 的半径与圆 A 半径的比值，得到 MO，相加即得 AO.



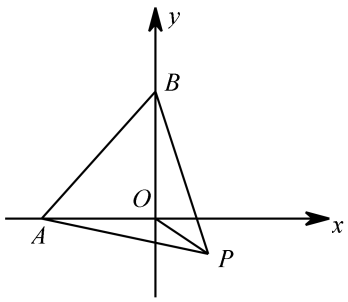
6. 如图，已知点 A 是第一象限内横坐标为 $2\sqrt{3}$ 的一个定点，$AC\perp x$ 轴于点 M，交直线 $y=-x$ 于点 N，若点 P 是线段 ON 上的一个动点，$\angle APB=30°$，$BA\perp PA$，则点 P 在线段 ON 上运动时，A 点不变，B 点随之运动．求当点 P 从点 O 运动到点 N 时，点 B 运动的路径长是_____．



【解答】$2\sqrt{2}$

【分析】根据 $\angle PAB=90°$，$\angle APB=30°$ 可得：$AP:AB=\sqrt{3}:1$，故 B 点轨迹也是线段，且 P 点轨迹路径长与 B 点轨迹路径长之比也为 $\sqrt{3}:1$，P 点轨迹长 ON 为 $2\sqrt{6}$，故 B 点轨迹长为 $2\sqrt{2}$．

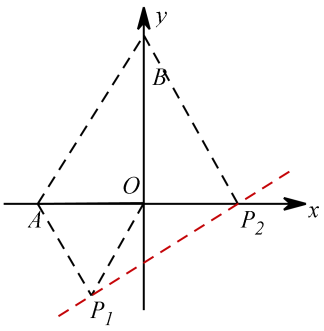
7. 如图，在平面直角坐标系中，A（-3，0），点 B 是 y 轴正半轴上一动点，点 C、D 在 x 正半轴上，以 AB 为边在 AB 的下方作等边 $\triangle ABP$，点 B 在 y 轴上运动时，求 OP 的最小值．



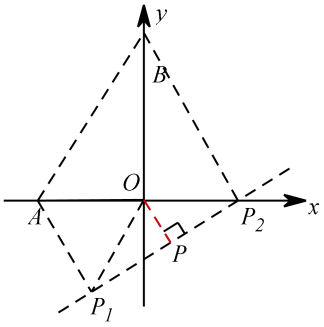
【解答】$OP=\dfrac{3}{2}$

【解析】求 OP 最小值需先作出 P 点轨迹，根据 $\triangle ABP$ 是等边三角形且 B 点在直线上运动，故可知 P 点轨迹也是直线．

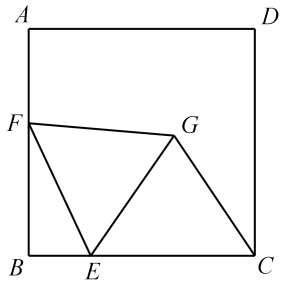
取两特殊时刻：（1）当点 B 与点 O 重合时，作出 P 点位置 P_1；（2）当点 B 在 x 轴上方且 AB 与 x 轴夹角为 60°时，作出 P 点位置 P_2．连接 P_1P_2，即为 P 点轨迹．



根据$\angle ABP=60°$可知：P_1P_2与y轴夹角为60°，作$OP\perp P_1P_2$，所得OP长度即为最小值，$OP_2=OA=3$，所以$OP=\frac{3}{2}$.



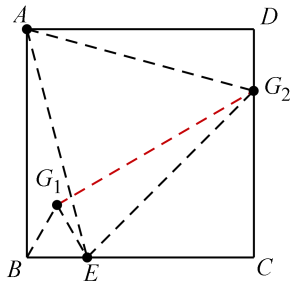
8. 如图，正方形$ABCD$的边长为4，E为BC上一点，且$BE=1$，F为AB边上的一个动点，连接EF，以EF为边向右侧作等边$\triangle EFG$，连接CG，求CG的最小值是多少？



【解答】$\frac{5}{2}$

【解析】同样是作等边三角形，区别于上一题求动点路径长，本题是求CG最小值，可以将F点看成是由点B向点A运动，由此作出G点轨迹：

考虑到F点轨迹是线段，故G点轨迹也是线段，取起点和终点即可确定线段位置，初始时刻G点在G_1位置，最终G点在G_2位置（G_2不一定在CD边），G_1G_2即为G点运动轨迹.



CG 最小值即当 $CG\perp G_1G_2$ 的时候取到，作 $CH\perp G_1G_2$ 于点 H，CH 即为所求的最小值.

根据模型可知：G_1G_2 与 AB 夹角为 60°，故 $G_1G_2\perp EG_1$.

过点 E 作 $EF\perp CH$ 于点 F，则 $HF=EG_1=1$，$CF=\dfrac{1}{2}CE=\dfrac{3}{2}$，

所以 $CH=\dfrac{5}{2}$，因此 CG 的最小值为 $\dfrac{5}{2}$.

