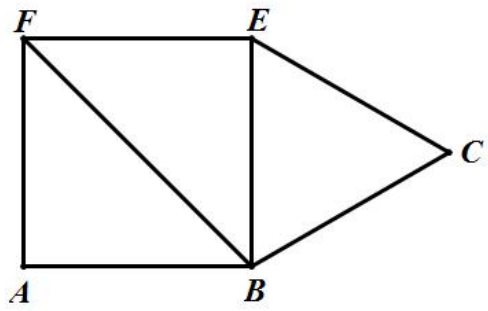
几何最值之将军饮马巩固练习（基础）

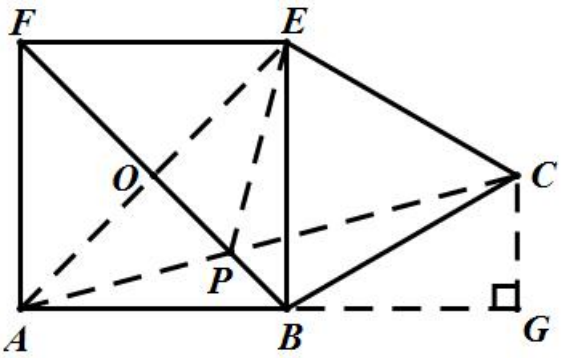
1. 如图，正方形 $ABEF$ 的面积为 4，$\triangle BCE$ 是等边三角形，点 C 在正方形 $ABEF$ 外，在对角线 BF 上有一点 P，使 $PC+PE$ 最小，则这个最小值的平方为（　　）

A. $4\sqrt{3}$　　B. $8+4\sqrt{3}$　　C. 12　　D. $8+2\sqrt{3}$



【解答】B

【解析】连接 AC、AE，过点 C 作 $CG\perp AB$，如图所示：



∵正方形 $ABEF$，

∴$AE\perp BF$,$OA=OE$，

即可得：E 关于 BF 的对称点是 A，连接 AC 交 BF 于 P，则此时 $EP+CP$ 的值最小，$EP+CP=AC$，

∵正方形 $ABEF$ 的面积为 4，$\triangle BCE$ 是等边三角形，

∴$AB=BE=2$，$BE=BC=2$，

在 $Rt\triangle BCG$ 中，$\angle CBG=90^{o}-60^{o}=30^{o}$，$BC=2$，

∴$CG=1$，$BG=\sqrt{3}$，

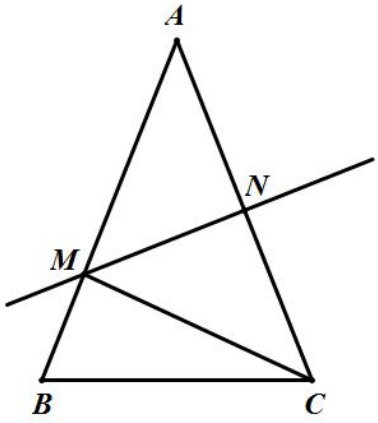
$\therefore AC=\sqrt{CG^2+AG^2}=\sqrt{1^2+\left(2+\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{8+4\sqrt{3}}$，

$\therefore AC^2=8+4\sqrt{3}$，即这个最小值的平方为$8+4\sqrt{3}$.

2. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$,AC 的垂直平分线交 AC 于点 N，交 AB 于点 M，$AB=12$，$\triangle BMC$ 的周长

是 20，若点 P 在直线 MN 上，则 $PA-PB$ 的最大值为（　　）

A. 12　　B. 8　　C. 6　　D. 2



【解答】B

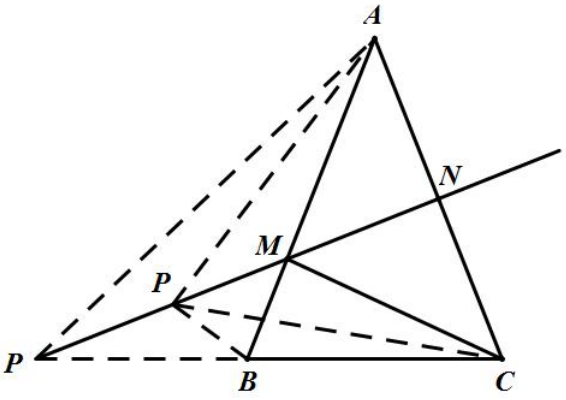
【解析】∵MN 垂直平分 AC，∴$MA=MC$，

又∵$C_{\triangle BMC}=BM+MC+BC=20$，$BM+MA=AB=12$，

∴$BC=20-12=8$，

在 MN 上取点 P，∵MN 垂直平分 AC，

如图所示，连接 PA、PB、PC，∴$PA=PC$，

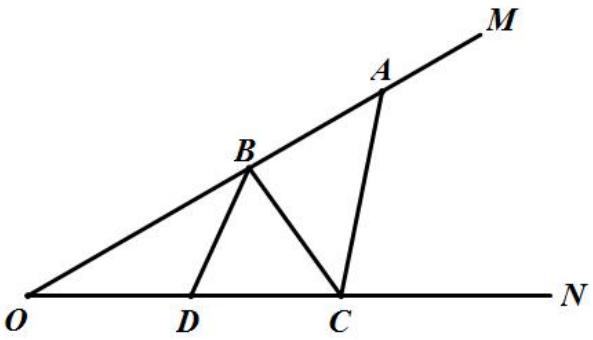


∴$PA-PB=PC-PB$，

在△PBC 中 $PC-PB<BC$

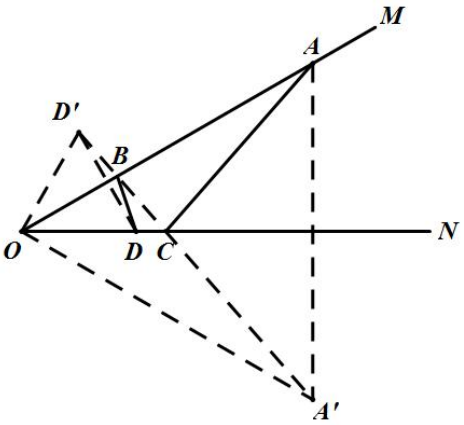
当 P、B、C 共线时（$PC-PB$）有最大值，此时 $PC-PB=BC=8$，故选 B.

3.　如图，在∠MON 的边 OM,ON 上分别有点 A,D，且∠$MON=30°$，$OA=10$，$OD=6$，B，C 两点分别是边 OM,ON 上的动点，则 $AC+BC+BD$ 的最小值为_____.



【解答】$2\sqrt{34}$

【解析】作点 D 关于 OM 的对称点 D'，作点 A 关于 ON 的对称点 A'，连接 $A'D'$，与 OM,ON 的交点就是点 B、C，如图所示：



此时 $AC+BC+BD=A'C+BC+BD'=A'D'$为最短距离。

连接 OD'，OA'，

根据对称性可知：

$OA=OA',OD=OD'$，$\angle AOA'=60°$，$\angle DOD'=60°$，

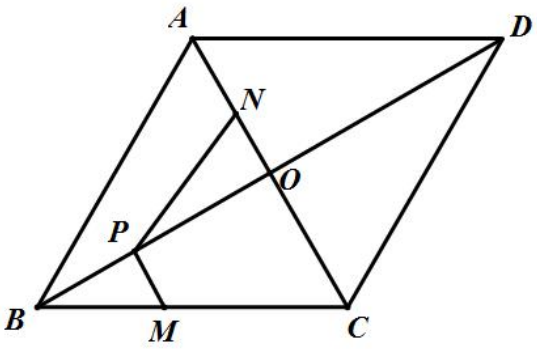
∴△AOA'和△DOD'是等边三角形，

∴$OD'=OD=6$，$OA'=OA=10$，$\angle A'OD=90°$，

根据勾股定理，得 $A'D'=\sqrt{A'O^2+D'O^2}=\sqrt{10^2+6^2}=2\sqrt{34}$，

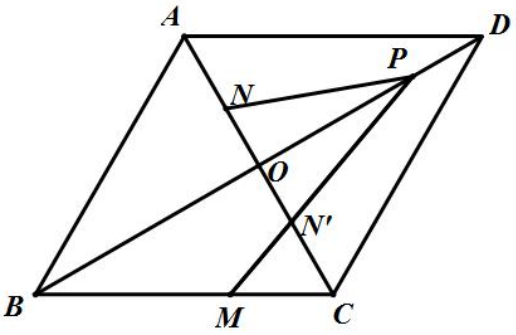
∴$AC+BC+BD$ 的最小值为$2\sqrt{34}$.

4. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，$AB=6$，$\angle ABC=60°$，AC 与 BD 交于点 O，点 N 在 AC 上且 $AN=2$，点 M 在 BC 上且 $BM=\frac{2}{3}BC$,P 为对角线 BD 上一点，则 $PM-PN$ 的最大值为_____.



【解答】2

【解析】如图所示，作以 BD 为对称轴作 N 的对称点 N'，连接 PN',MN'，



根据轴对称性质可知，$PN=PN'$，$\therefore PM-PN=PM-PN'\leqslant MN'$，

当 P,M,N' 三点共线时，取“=”，

$\because$ 在菱形 $ABCD$ 中，$AB=6$，$\angle ABC=60^{\circ}$，$\therefore AC=6$，

$\because O$ 为 AC 中点，$\therefore AO=OC=3$，

$\because AN=2$，$\therefore ON=1$，

$\therefore ON'=1$，$CN'=2$，$\therefore AN'=4$，

$\because BM=\dfrac{2}{3}BC=\dfrac{2}{3}\times 6=4$，

$\therefore CM=AB-BM=6-4=2$，

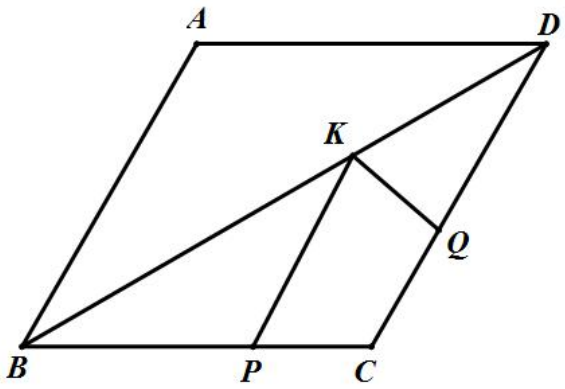
$\therefore \dfrac{CM}{BM}=\dfrac{CN'}{AN'}=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore PM/\!/AB/\!/CD$，$\angle CMN'=60^{\circ}$，

$\because \angle N'CM=60^{\circ}$，$\therefore \triangle N'CM$ 为等边三角形，

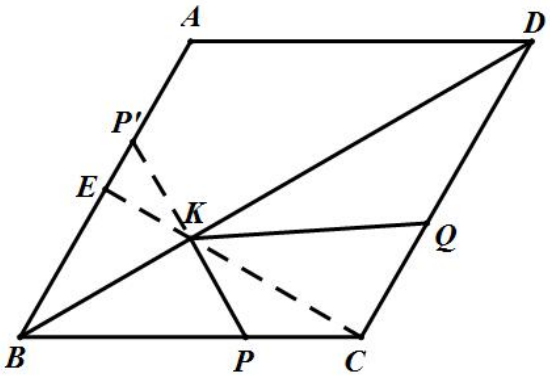
$\therefore CM=MN'=2$，即 $PM-PN$ 的最大值为 2.

5. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，$AB=2\sqrt{2}$，$\angle A=120^{\circ}$，点 P,Q,K 分别为线段 BC,CD，BD 上的任意一点，则 $PK+QK$ 的最小值为_____.



【解答】$\sqrt{6}$

【解析】过点 C 作 $CE\perp AB$，如图所示：



∵菱形 $ABCD$ 中，$AB=2\sqrt{2}$，$\angle A=120^{\circ}$，

∴$\angle ABC=60^{\circ}$，$BC=2\sqrt{2}$，BD 平分 $\angle ABD$，

∴$BE=\sqrt{2}$，$CE=\sqrt{3}$ $BE=\sqrt{6}$，

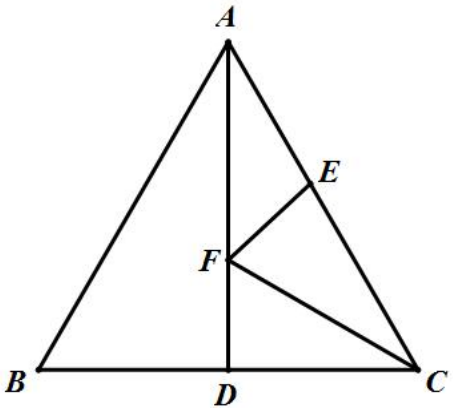
∵BD 平分 $\angle ABD$，∴在 AB 上作点 P 关于 BD 的对称点 P'，

∴$PK+QK=P'K+KQ$，

当 P',K,Q 三点共线且 $P'Q\perp AB$ 时，$PK+QK$ 有最小值，

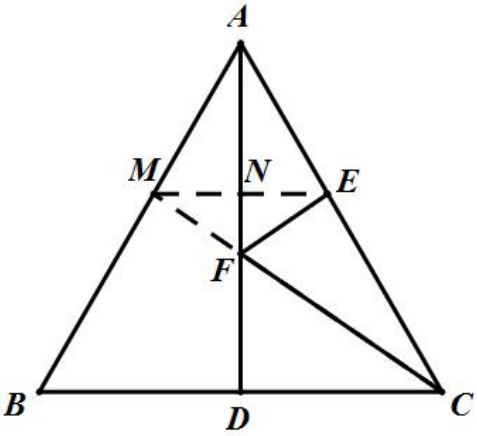
即最小值为平行线 AB,CD 的距离，则最小值为 $\sqrt{6}$.

6. 如图，等边△ABC 的边长为 4，AD 是 BC 边上的中线，F 是 AD 边上的动点，E 是 AC 边上一点，若 $AE=2$，当 $EF+CF$ 取得最小值时，则 $\angle ECF$ 的度数为多少？



【解答】$\angle ECF=30^{\circ}$

【解析】过 E 作 $EM\parallel BC$，交 AD 于 N，如图所示：



$\because AC=4$，$AE=2$，$\therefore EC=2=AE$，

$\therefore AM=BM=2$，$\therefore AM=AE$，

$\because AD$ 是 BC 边上的中线，$\triangle ABC$ 是等边三角形，$\therefore AD\perp BC$，

$\because EM\parallel BC$，$\therefore AD\perp EM$，

$\because AM=AE$，$\therefore E$ 和 M 关于 AD 对称，

连接 CM 交 AD 于 F，连接 EF，则此时 $EF+CF$ 的值最小，

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore \angle ACB=60^{\circ}$，$AC=BC$，$\because AM=BM$，

$\therefore \angle ECF=\frac{1}{2}\angle ACB=30^{\circ}$.

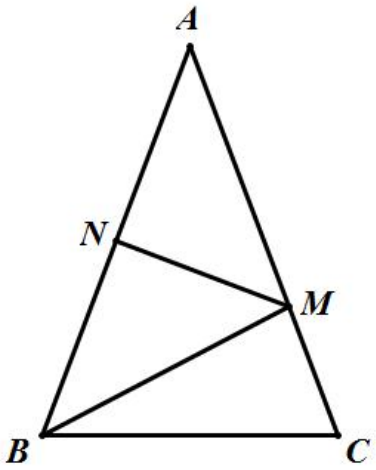
7. 如图，在$\triangle ABC$ 中，已知 $AB=AC$,AB 的垂直平分线交 AB 于点 N，交 AC 于点 M，连接 MB.

（1）若$\angle ABC=70^{\circ}$，则$\angle NMA$ 的度数是_____度；

（2）若 $AB=8$，$\triangle MBC$ 的周长是 14.

①求 BC 的长度；

②若点 P 为直线 MN 上一点，请你直接写出△PBC 周长的最小值.



【解答】（1）$\angle NMA=50°$；（2）①$BC=6$，②最小值为 14

【解析】（1）∵$AB=AC$，∴$\angle C=\angle ABC=70°$，∴$\angle A=40°$，

∵AB 的垂直平分线交 AB 于点 N，

∴$\angle ANM=90°$，

∴$\angle NMA=50°$；

（2）①∵MN 是 AB 的垂直平分线，

∴$AM=BM$，

△MBC 的周长$=BM+CM+BC=AM+CM+BC=AC+BC$，

∵$AB=8$，△MBC 的周长是 14，

∴$BC=14-8=6$；

②当点 P 与 M 重合时，△PBC 周长的值最小，

理由：∵$PB+PC=PA+PC$,$PA+PC\geqslant AC$，

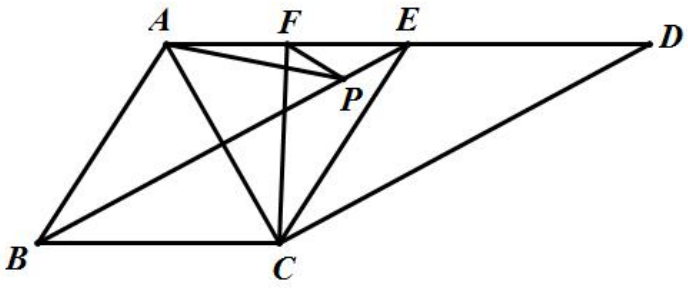
∴P 与 M 重合时，$PA+PC=AC$，此时 $PB+PC$ 最小，

∴△PBC 周长的最小值$=AC+BC=8+6=14$.

8. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$BC/\!/AD$,$BC=\frac{1}{2}AD$，点 E 为 AD 的中点，点 F 为 AE 的中点，$AC\perp CD$，连接 BE、CE、CF.

（1）判断四边形 $ABCE$ 的形状，并说明理由；

（2）如果 $AB=4$，$\angle D=30°$，点 P 为 BE 上的动点，求△PAF 的周长的最小值.



【解答】（1）菱形；（2）$2\sqrt{3}+2$

【解析】（1）四边形 $ADCE$ 是菱形，理由如下

∵点 E 是 AD 的中点，∴$AE=\frac{1}{2}AD$

∵$BC=\frac{1}{2}AD$，∴$AE=BC$

∵$BC\parallel AD$，即 $DC\parallel AE$，

∴四边形 $ABCE$ 是平行四边形，

∵$AC\perp CD$，点 E 是 AD 的中点，∴$CE=AE=DE$，

∴四边形 $ABCE$ 是菱形；

（2）由（1）得，四边形 $ABCE$ 是菱形

∴$AE=EC=AB=4$，且点 A、C 关于 BE 对称，

∵点 F 是 AE 的中点，$AF=\frac{1}{2}AE=2$，

当 $PA+PF$ 最小时，$\triangle PAF$ 的周长最小，

即点 P 为 CF 与 BE 的交点时，$\triangle PAF$ 的周长最小，

此时$\triangle PAF$ 的周长$=PA+PF+AF=CF+AF$，

在 $Rt\triangle ACD$ 中，点 E 是 AD 的中点，则 $CE=DE$，

$\angle ECD=\angle D=30^{\circ}$，$\angle ACE=90^{\circ}-30^{\circ}=60^{\circ}$

∴$\triangle ACE$ 是等边三角形，∴$AC=AE=CE=4$，

∵$AF=EF$,$CF\perp AE$，∴$CF=\sqrt{AC^2-AF^2}=2\sqrt{3}$

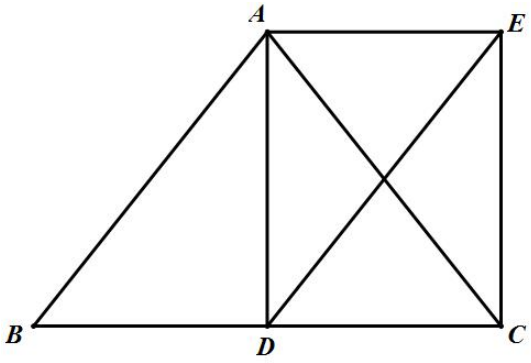
$\triangle PAF$ 的周长最小$=CF+AF=2\sqrt{3}+2$.

9. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$,AD 是中线，且 AC 是 DE 的中垂线

（1）求证：$\angle BAD=\angle CAD$；

（2）连接 CE，写出 BD 和 CE 的数量关系，并说明理由；

（3）当∠*BAC*＝90°，*BC*＝8 时，在 *AD* 上找一点 *P*，使得点 *P* 到点 *C* 与到点 *E* 的距离之和最小，求△*BCP* 的面积.



【解答】（1）见解析；（2）*BD*＝*CE*；（3）8

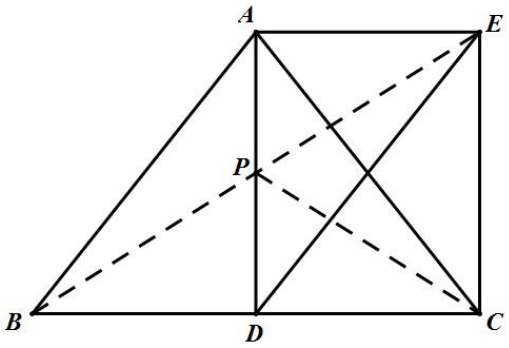
【解析】（1）∵*AB*＝*AC*,*AD* 是中线，∠*BAD*＝∠*CAD*；

（2）*BD*＝*CE*.

理由：∵*AD* 是中线，∴*BD*＝*CD*，

∵*AD*,*AE* 关于 *AC* 对称，∴*CD*＝*CE*，∴*BD*＝*CE*；

（3）连接 *BE* 交 *AD* 于点 *P*，此时 *PE*＋*PC* 的值最小，如图所示：



∵*AB*＝*AC*，∠*BAC*＝90°，*BD*＝*DC*＝4，∴*AD*＝*AE*＝4，

由题意 *AE*∥*BD*,*AE*＝*AD*＝*BD*，

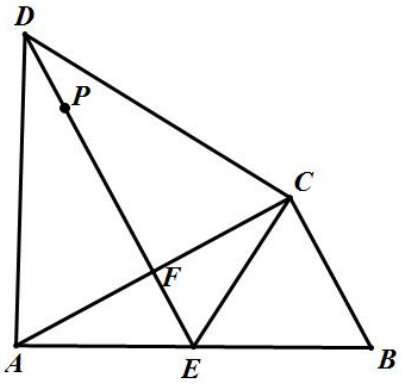
∴四边形 *ABDE* 是平行四边形，∴*PA*＝*PD*＝2，

∵*PD*⊥*BC*，∴ $S_{\triangle BCP}=\frac{1}{2}\times 8\times 2=8$.

10. 如图，在△*ABC* 中，∠*ACB*＝90°，以 *AC* 为边在△*ABC* 外作等边三角形 *ACD*，过点 *D* 作 *AC* 的垂线，垂足为 *F*，与 *AB* 相交于点 *E*，连接 *CE*

（1）说明：*AE*＝*CE*＝*BE*；

（2）若 *DA*⊥*AB*,*BC*＝6，*P* 是直线 *DE* 上的一点，则当 *P* 在何处时，*PB*＋*PC* 最小，并求出此时 *PB*＋*PC* 的值.



【解答】（1）见解析；（2）12

【解析】（1）∵△*ADC* 是等边三角形，*DF*⊥*AC*，

∴*DF* 垂直平分线段 *AC*，∴*AE*＝*EC*，

∴∠*ACE*＝∠*CAE*，

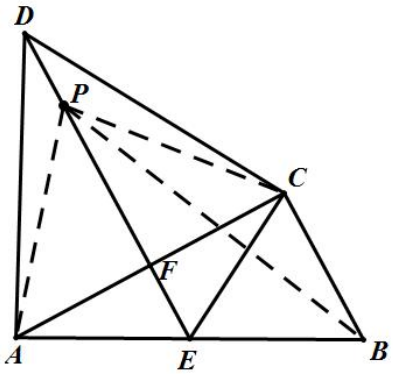
∵∠*ACB*＝90°，

∴∠*ACE*＋∠*BCE*＝90°＝∠*CAE*＋∠*B*＝90°，

∴∠*BCE*＝∠*B*，∴*CE*＝*EB*，

∴*AE*＝*CE*＝*BE*；

（2）连接 *PA*,*PB*,*PC*，如图所示：



∵*DA*⊥*AB*，∴∠*DAB*＝90°，

∵∠*DAC*＝60°，∴∠*CAB*＝30°，

∴∠*B*＝60°，∴*BC*＝*AE*＝*EB*＝*CE*＝6.

∴*AB*＝12，

∵*DE* 垂直平分 *AC*，∴*PC*＝*AP*，∴*PC*＝*PB*＋*PA*，

∴当 *PB*＋*PC* 最小时，也就是 *PB*＋*PA* 最小，即 *P*,*B*,*A* 共线时最小，

∴当点 *P* 与点 *E* 共点时，*PB*＋*PC* 的值最小，最小值为 12.