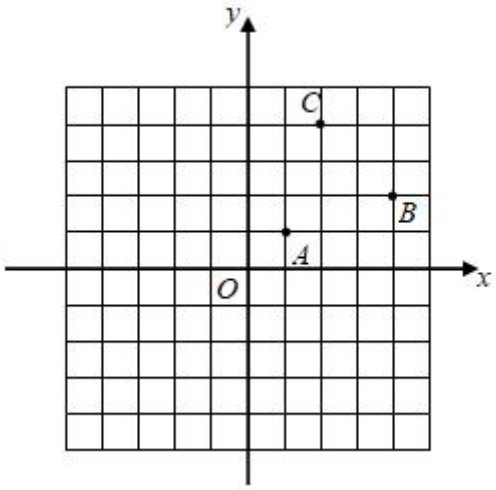
几何变换之翻折（轴对称）巩固练习

1．已知，在 10×10 网格中建立如图所示的平面直角坐标系，△ABC 是格点三角形（三角形的顶点是网格线的交点）．

（1）面出△ABC 关于 y 轴对称的△$A_1B_1C_1$；

（2）画出△$A_1B_1C_1$ 向下平移 5 个单位长度得到的△$A_2B_2C_2$；若点 B 的坐标为（4，2），请直接写出 B_2 的坐标．

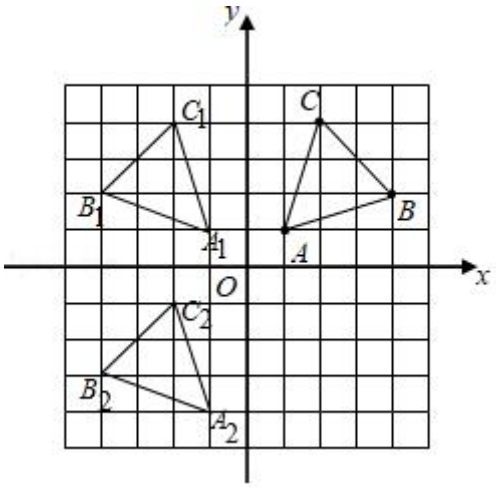


【分析】（1）分别作出 A，B，C 的对应点 A_1，B_1，C_1 即可．

（2）分别作出点 A_1，B_1，C_1 的对应点 A_2，B_2，C_2 即可．

【解答】解：（1）如图，△$A_1B_1C_1$ 即为所求．

（2）如图，△$A_2B_2C_2$ 即为所求．B_2（﹣4，﹣3）．

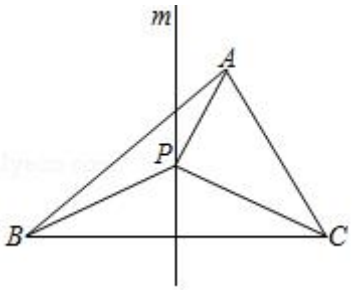


【点评】本题考查作图﹣轴对称变换，平移变换等知识，解题的关键是理解题意，灵活运用所学知识解决问题．

2．如图，直线 m 是△ABC 中 BC 边的垂直平分线，点 P 是直线 m 上的一动点，若 AB=6，AC=4，BC=7，

（1）求 PA+PB 的最小值，并说明理由；

（2）求△APC 周长的最小值．



【分析】（1）根据线段的性质即可得到结论；

（2）根据题意知点 C 关于直线 m 的对称点为点 B，故当点 P 与点 D 重合时，$AP+CP$ 值的最小，求出 AB 长度即可得到结论．

【解答】解：（1）$PA+PB=AB=6$；

原因：两点之间，线段最短；

（2）∵m 是 BC 的垂直平分线，点 P 在 m 上，

∴点 C 关于直线 m 的对称点是点 B 且 $PB=PC$，

∵$C_{\triangle ABC}=AP+PC+AC$，

∵$AC=4$，

要使△APC 周长最小，

即 $AP+PC$ 最小，

当点 P 是 m 与 AB 的交点时，$PA+PB$ 最小，

即 $PA+PB=AB$，此时 $C_{\triangle ABC}=AB+AC=6+4=10$．

【点评】本题考查了轴对称 - 最短路线问题的应用，解此题的关键是找出 P 的位置．

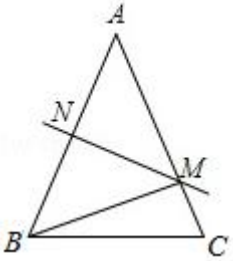
3．如图，在△ABC 中，已知 $AB=AC$，AB 的垂直平分线交 AB 于点 N，交 AC 于点 M，连接 MB．

（1）若∠$ABC=70°$，则∠MNA 的度数是 50° ．

（2）若 $AB=8cm$，△MBC 的周长是 $14cm$．

①求 BC 的长度；

②若点 P 为直线 MN 上一点，请你直接写出△PBC 周长的最小值．



【分析】（1）依据△ABC 是等腰三角形，即可得到∠ACB 的度数以及∠A 的度数，再根据 MN 是垂直平分线，

即可得到∠*ANM*的度数，进而得出∠*AMN*的度数；

（2）①依据垂直平分线的性质，即可得到 *AM*＝*BM*，进而得出△*BCM*的周长＝*AC*+*BC*，再根据 *AB*＝*AC*＝8*cm*，△*MBC*的周长是 14*cm*，即可得到 *BC*的长；

②依据 *PB*+*PC*＝*PA*+*PC*，*PA*+*PC*≥*AC*，即可得到当 *P*与 *M*重合时，*PA*+*PC*＝*AC*，此时 *PB*+*PC*最小，进而得出△*PBC*的周长最小值．

【解答】解：（1）∵*AB*＝*AC*，

∴∠*C*＝∠*ABC*＝70°，

∴∠*A*＝40°，

∵*AB*的垂直平分线交 *AB*于点 *N*，

∴∠*ANM*＝90°，

∴∠*NMA*＝50°，

故答案为：50°；

（2）①∵*MN*是 *AB*的垂直平分线，

∴*AM*＝*BM*，

∴△*BCM*的周长＝*BM*+*CM*+*BC*＝*AM*+*MC*+*BC*＝*AC*+*BC*，

∵*AB*＝*AC*＝8*cm*，△*MBC*的周长是 14*cm*，

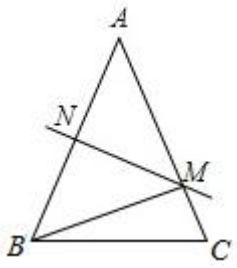
∴*BC*＝14﹣8＝6（*cm*）；

②当 *P*与 *M*重合时，△*PBC*的周长最小．

理由：∵*PB*+*PC*＝*PA*+*PC*，*PA*+*PC*≥*AC*，

∴当 *P*与 *M*重合时，*PA*+*PC*＝*AC*，此时 *PB*+*PC*最小值等于 *AC*的长，

∴△*PBC*的周长最小值＝*AC*+*BC*＝8+6＝14（*cm*）．



【点评】本题主要考查了最短路线问题以及等腰三角形的性质，凡是涉及最短距离的问题，一般要考虑线段的性质定理，结合轴对称变换来解决，多数情况要作点关于某直线的对称点．

4．如图，△*ABC*是等边三角形，点 *C*关于 *AB*的对称的点为 *E*，点 *P*是直线 *EB*上的一个动点，连接 *AP*，作∠*APQ*＝60°，交射线 *BC*于点 *Q*.

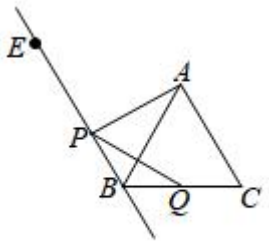


图 1

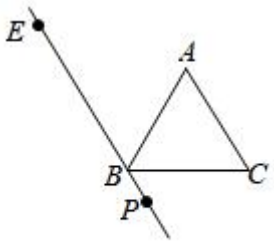


图 2

（1）如图 1，连接 AQ，求证：$\triangle APQ$ 为等边三角形；

（2）如图 2，当点 P 在线段 EB 延长线上时，请你补全图形，并写出线段 BQ、AB、BP 之间的数量关系（无需证明）.

【分析】（1）如图 1 中，作 $\angle BPF=60°$ 交 AB 于点 F，连接 AQ. 证明 $\triangle PBQ\cong\triangle PFA$（$ASA$），可得结论.

（2）结论：$BQ=BP+AB$. 如图 2 中，在 BD 上取一点 F，使得 $BF=PB$，连接 AQ. 证明 $\triangle BPA\cong\triangle FPQ$（$SAS$），推出 $AB=QF$，可得结论.

【解答】（1）证明：如图 1 中，作 $\angle BPF=60°$ 交 AB 于点 F，连接 AQ.

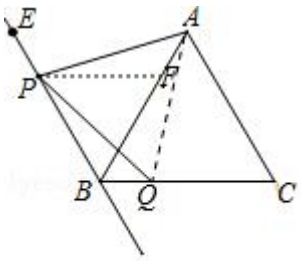


图 1

∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形，

∴ $\angle ABC=60°$，

∵ 点 E 与点 C 关于 AB 对称，

∴ $\angle EBA=\angle CBA=60°=\angle BPF$，

∴ $\angle PFB=60°$.

∴ $\triangle PBF$ 是等边三角形，

∴ $PB=PF$，$AFP=120°=\angle PBQ$.

∵ $\angle BPQ+\angle QPF=60°$，$\angle APF+\angle QPF=60°$，

∴ $\angle BPQ=\angle APF$，

在 $\triangle PBQ$ 和 $\triangle PFA$ 中，

$$\begin{cases}\angle BPQ=\angle APF\\ PB=PF\\ \angle PBQ=\angle PFA\end{cases},$$

∴△*PBQ*≌△*PFA*（*ASA*），

∴*PQ*＝*PA*，

∵∠*APQ*＝60°，

∴△*APQ*是等边三角形．

（2）解：补全图形，如图 2 所示：

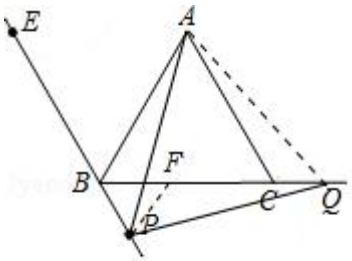


图2

②解：结论：*BQ*＝*BP*+*AB*.

理由：如图 3 中，在 *BD* 上取一点 *F*，使得 *BF*＝*PB*，连接 *AQ*.

∵∠*FBP*＝60°，*BF*＝*BP*，

∴△*FBP*是等边三角形，

∴∠*BPF*＝∠*APQ*＝60°，

∴∠*APB*＝∠*FPQ*，

∵*PB*＝*PF*，*PA*＝*PQ*，

∴△*BPA*≌△*FPQ*（*SAS*），

∴*AB*＝*QF*，

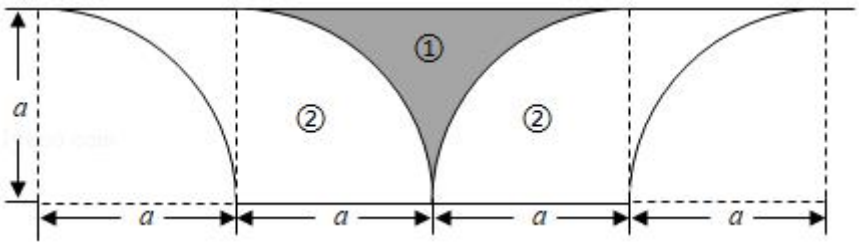
∴*BQ*＝*BF*+*FQ*＝*BP*+*AB*.

【点评】考查等边三角形的性质，全等三角形的判定和性质等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造全等三角形解决问题，属于中考常考题型．

5．国庆期间，广场上对一片花圃做了美化造型（如图所示），整个造型构成花的形状．造型平面呈轴对称，其正中间“花蕊”部分（区域①）摆放红花，两边“花瓣”部分（区域②）摆放黄花．

（1）两边“花瓣”部分（区域②）的面积是 $2a^2\pm\frac{\pi}{2}\cdot a^2$ ．（用含 a 的代数式表示）

（2）已知 a＝2 米，红花价格为 220 元/平方米，黄花价格为 180 元/平方米，求整个造型的造价（π 取 3）．



【分析】（1）区域②的面积＝三个正方形的面积+应该半圆的面积.

（2）分别求出区域①，②的面积，再乘以单价即可.

【解答】解：（1）区域②的面积＝$2a^2+\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot a^2=2a^2+\frac{\pi}{2}\cdot a^2$.

故答案为：$2a^2+\frac{\pi}{2}\cdot a^2$.

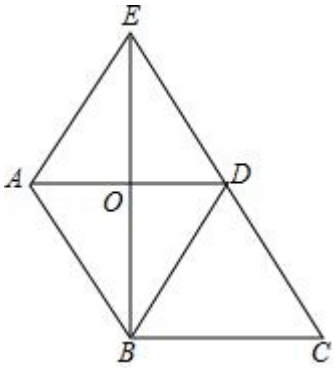
（2）整个造型的造价：$220(2\times2^2-\frac{\pi}{2}\times2^2)+180(2\times2^2+\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot2^2)=2960$（元）.

【点评】本题考查轴对称，正方形的性质，代数式等知识，解题的关键是理解题意，灵活运用所学知识解决问题.

6．如图，在▱*ABCD*中，*AD*的垂直平分线经过点*B*，与*CD*的延长线交于点*E*，*AD*与*BE*相交于点*O*，连接*AE*，*BD*.

（1）求证：四边形*ABDE*为菱形；

（2）若*AD*＝8，问在*BC*上是否存在点*P*，使得*PE*+*PD*最小？若存在，求线段*BP*的长；若不存在，请说明理由.



【分析】(1)根据题意得出*AO*＝*DO*，*AD*⊥*BE*.根据平行四边形的性质得出*AB*∥*CD*.即可得出∠*ABE*＝∠*BED*.从而证得△*AOB*≌△*DOE*（*AAS*），得到*BO*＝*EO*.即可证得四边形*ABDE*是平行四边形．由*AD*⊥*BE*，证得四边形*ABDE*是菱形；

（2）作点*D*关于*BC*的对称点*D*′，*DD*′交*BC*于点*G*，延长*EB*，过*D*′作*DM*⊥*BE*于点*M*，连接*ED*′交*BC*于点*P*，此时*PD*+*PE*最小；根据题意得到*BO*＝*DG*.*BM*＝*GD*.即可得到*MD*′＝*DO*＝$\frac{1}{2}$*AD*＝4.进一步得到*BO*＝*EO*＝*BM*.通过证得△*BEP*∽△*MED*′，得到$\frac{BP}{MD'}=\frac{BE}{EM}=\frac{2}{3}$，进而证得*BP*＝$\frac{8}{3}$.

【解答】（1）证明：∵BE垂直平分AD，

∴$AO=DO$，$AD\perp BE$.

∵四边形$ABCD$是平行四边形，

∴$AB//CD$.

∴$\angle ABE=\angle BED$.

∵$\angle AOB=\angle DOE$，

又$AO=DO$，

∴$\triangle AOB\cong\triangle DOE$（$AAS$），

∴$BO=EO$.

又$AO=DO$，

∴四边形$ABDE$是平行四边形.

∵$AD\perp BE$，

∴四边形$ABDE$是菱形；

（2）解：如图所示：作点D关于BC的对称点D'，DD'交BC于点G，延长EB，过D'作$DM\perp BE$于点M，连接ED'交BC于点P，此时$PD+PE$最小；

∵$\angle BOD=\angle OBC=\angle BGD=90°$，

∴四边形$ODGB$是矩形.

∴$BO=DG$.

同理$BM=GD$.

∴$MD'=DO=\frac{1}{2}AD=4$.

又$BO=EO$，

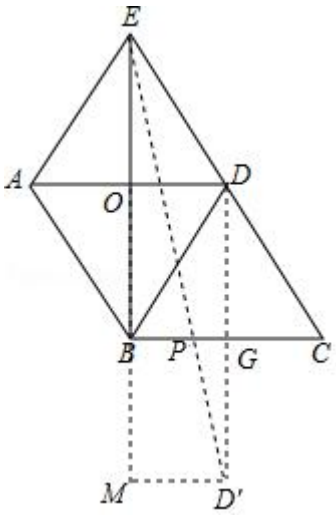
∴$BO=EO=BM$.

∵$\angle EBP=\angle M=90°$，$\angle BEP=\angle MED'$，

∴$\triangle BEP\backsim\triangle MED'$，

∴$\frac{BP}{MD'}=\frac{BE}{EM}=\frac{2}{3}$，

∴$\frac{BP}{4}=\frac{2}{3}$，即$BP=\frac{8}{3}$.

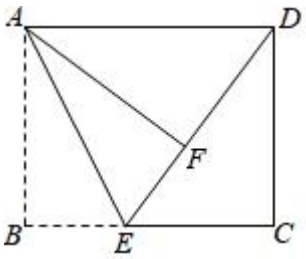


【点评】本题考查了线段垂直平分线的性质，平行四边形的性质，三角形求得的判定和性质，菱形的判定和性质，轴对称－最短路线问题，熟练掌握性质定理是解题的关键.

7．如图，在长方形 $ABCD$ 中，$AB=8$，$AD=10$，点 E 为 BC 上一点，将△ABE 沿 AE 折叠，使点 B 落在长方形内点 F 处，连接 DF，且 $DF=6$.

（1）求证：$AF\perp DF$.

（2）求 BE 的长.



【分析】（1）由折叠的性质和勾股定理的逆定理证出△ADF 是直角三角形即可；

（2）设 $BE=x$，则 $EF=x$，$DE=6+x$，$EC=10-x$，在 Rt△DCE 中，由勾股定理得出方程，解方程即可.

【解答】（1）证明：∵将△ABE 沿 AE 折叠，使点 B 落在长方形内点 F 处，

∴$AF=AB=8$，

∵$AF^2+DF^2=6^2+8^2=100=10^2=AD^2$，

∴△ADF 是直角三角形，$\angle AFD=90°$

∴$AF\perp DF$；

（2）解：由折叠的性质得：$BE=FE$，$\angle B=\angle AFE=90°$，

又∵$\angle AFD=90°$，

∴$\angle AFE+\angle AFD=180°$，

∴点 D，F，E 在一条直线上，

∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴$BC=AD=10$，$CD=AB=8$，$\angle C=90°$，

设 $BE=x$，则 $EF=x$，$DE=6+x$，$EC=10-x$，

在 $Rt\triangle DCE$ 中，由勾股定理得：$CE^2+CD^2=DE^2$，

即 $(10-x)^2+8^2=(6+x)^2$.

解得：$x=4$.

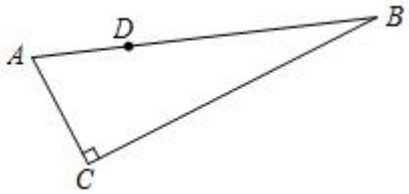
∴$BE=4$.

【点评】本题考查了翻折变换的性质、矩形的性质、勾股定理的逆定理、勾股定理等知识；熟练掌握翻折变换的性质和勾股定理以及逆定理是解题的关键.

8．如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$．D 是边 AB 上一点，点 D 关于直线 AC 的对称点为 E，连接 EC 并延长 EC 至点 F，且 $CF=EC$．连接 AE，BF.

（1）依题意补全图形；

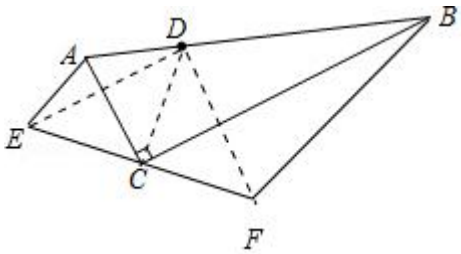
（2）猜想线段 AB，AE，BF 的数量关系并证明.



【分析】（1）根据要求画出图形即可.

（2）结论：$AB=AE+BF$．想办法证明 $AD=AE$，$BD=BF$ 即可.

【解答】解：（1）图形如图所示：



（2）结论：$AB=AE+BF$.

理由：∵D，E 关于 AC 对称，

∴$DE\perp AC$，$CE=CD$，$AE=AD$，

∵$EC=CF$　　，

∴$CD=CE=CF$，

∴∠*EDF*＝90°，

∴*ED*⊥*FD*，

∴*AC*∥*DF*，

∵∠*ACB*＝90°，

∴*AC*⊥*BC*，

∴*DF*⊥*BC*，

∵*CD*＝*CF*，

∴*CB*垂直平分线段 *DF*，

∴*BD*＝*BF*，

∵*AB*＝*AD*+*BD*，*AD*＝*AE*，*BD*＝*BF*，

∴*AB*＝*AE*+*BF*.

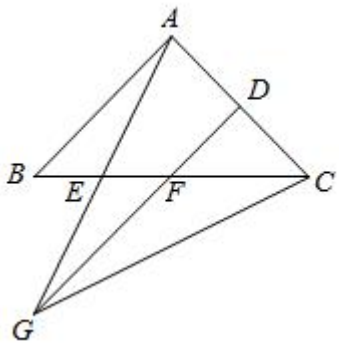
【点评】本题考查作图－轴对称变换，线段的垂直平分线的判定和性质等知识，解题的关键是理解题意，灵活运用所学知识解决问题.

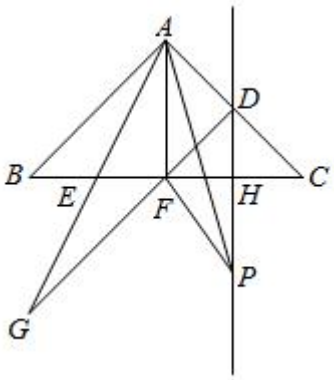
9．如图，在△*ABC*中．*AB*＝*AC*，点 *E*在线段 *BC*上，连接 *AE*并延长到 *G*，使得 *EG*＝*AE*，过点 *G*作 *GD*∥*BA*分别交 *BC*，*AC*于点 *F*，*D*.

（1）求证：△*ABE*≌△*GFE*；

（2）若 *GD*＝3，*CD*＝1，求 *AB*的长度；

（3）过点 *D*作 *DH*⊥*BC*于 *H*，*P*是直线 *DH*上的一个动点，连接 *AF*，*AP*，*FP*，若∠*C*＝45°，在（2）的条件下，求△*AFP*周长的最小值.





【分析】（1）根据 *AAS*证明三角形全等即可.

（2）求出 *FG*的长，利用全等三角形的性质解决问题即可.

（3）证明点 *F*与点 *C*关于直线 *PD*对称，推出当点 *P*与 *D*重合时，△*PAF*的周长最小，最小值＝△*ADF*的周长.

【解答】（1）证明：如图 1 中，∵$GD/\!/AB$，

∴$\angle B=\angle EFG$，

在△ABE和△GFE中，

$$\begin{cases}\angle B=\angle EFG\\ \angle AEB=\angle GEF\\ AE=EG\end{cases},$$

∴△ABE≌△GFE（AAS）.

（2）解：如图 1 中，

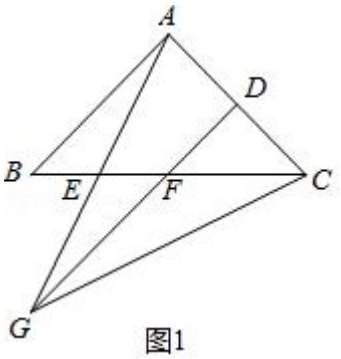


图1

∵$AB=AC$，

∴$\angle B=\angle ACB$，

∵$DF/\!/AB$，

∴$\angle DFC=\angle B$，

∴$\angle DFC=\angle DCF$，

∴$DC=DF=1$，

∵$DG=3$，

∴$FG=DG-DF=2$，

∵△ABE≌△GFE，

∴$AB=GF=2$.

（3）解：如图 2 中，∵$AB=AC=2$，

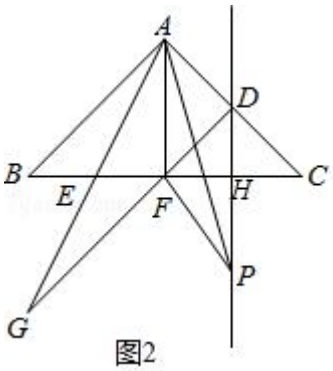


图2

∴∠B=∠C=45°，

∴∠BAC=90°，

∵AB//FD，

∴∠FDC=∠BAC=90°，即FD⊥AC

∵AC=AB=2，CD=1，

∴DA=DC，

∴FA=FC，

∴∠C=∠FAC=45°，

∴∠AFC=90°，

∴DF=DA=DC=1，

∴AF=$\sqrt{2}$，

∵DH⊥CF，

∴FH=CH，

∴点F与点C关于直线PD对称，

∴当点P与D重合时，△PAF的周长最小，最小值=△ADF的周长=2+$\sqrt{2}$.

【点评】本题考查等腰三角形的性质，平行线的性质，全等三角形的判定和性质，轴对称最短问题等知识，解题的关键是正确寻找全等三角形解决问题，学会利用轴对称解决最短问题，属于中考常考题型.

10．如图，在直角坐标系中，A（5，0），B（3，4），C（0，4），点D在OA上，∠ABD=∠1，BH⊥OA于H.

（1）判断△OAB的形状，并说明理由.

（2）求点D的坐标.

（3）若P是BH上的动点，当△PCD的周长最小时，求△PCD的面积.

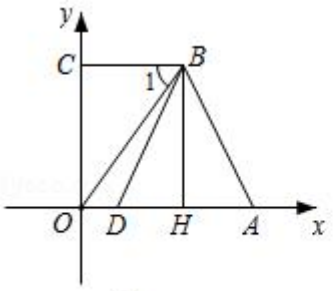


图1

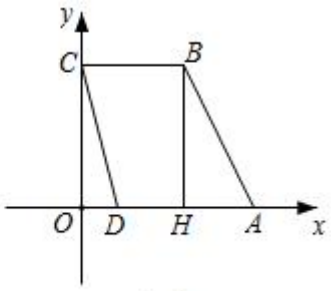


图2

【分析】（1）依据勾股定理即可得到 OB 的长，依据点 A 的坐标即可得到 OA 的长，进而得出△AOB 是等腰三角形；

（2）依据四边形 $BCOH$ 是矩形，即可得到 $OH=BC=3$，进而得出 $AH=AO-HO=2$，再根据△ABD 是等腰三角形，即可得到 DH 的长，进而得到点 D 的坐标；

（3）连接 AC，交 BH 于 P，连接 PD，依据 $PD=PA$，可得 $PC+PD+CD=PC+PA+CD=AC+CD$，此时，△PCD 的周长最小，求得 $PH=\frac{8}{5}$，再根据 $S_{△PCD}=S_{梯形\ PHOC}-S_{△COD}-S_{△PHD}$ 进行计算即可．

【解答】解：（1）△AOB 是等腰三角形，理由如下：

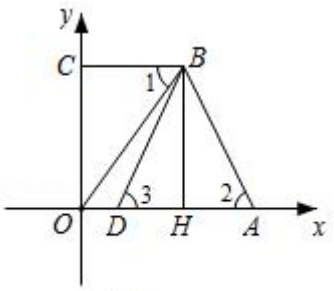


图1

∵B（3，4），C（0，4），

∴$BC// OA$，$OC=4$，

∴Rt△BOC 中，$OB=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

∵A（5，0），

∴$OA=5$，

∴$OA=OB$，即△AOB 的等腰三角形；

（2）如图 1，∵$BH\perp AO$，$BC// OA$，

∴$\angle BHO=90°=\angle COH=\angle BCO$，

∴四边形 $BCOH$ 是矩形，

∴$OH=BC=3$，

∴$AH=AO-HO=2$，

∵$\angle ABD=\angle 1$，

∴$\angle ABO=\angle CBD$，

由 $BC//AO$ 可得$\angle 3=\angle CBD$，

由（1）可得$\angle 2=\angle ABO$，

∴$\angle 3=\angle 2$，

∴$AB=DB$，

∴$AH=DH=2$，

∴$OD=OH-DH=3-2=1$，

∴D（1，0）；

（3）如图 2，连接 AC，交 BH 于 P，连接 PD，

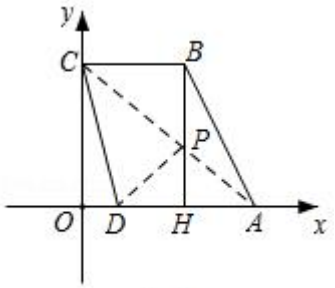


图2

由（2）可得，$PD=PA$，

∴$PC+PD+CD=PC+PA+CD=AC+CD$，

此时，△PCD 的周长最小，

设 AC 的解析式为 $y=kx+b$（$k\neq 0$），

把 A（5，0），C（0，4）代入可得，

$\begin{cases}0=5k+b\\4=b\end{cases}$，

解得$\begin{cases}k=-\frac{4}{5}\\b=4\end{cases}$，

∴直线 AC 的解析式为 $y=-\frac{4}{5}x+4$，

当 $x=3$ 时，$y=\frac{8}{5}$，

∴P（3，$\frac{8}{5}$），即 $PH=\frac{8}{5}$，

∴$S_{\triangle PCD}=S_{梯形\ PHOC}-S_{\triangle COD}-S_{\triangle PHD}$

$=\frac{(\frac{8}{5}+4)\times 3}{2}-\frac{1}{2}\times 4\times 1-\frac{1}{2}\times\frac{8}{5}\times 2$

$=\frac{42}{5}-2-\frac{8}{5}$

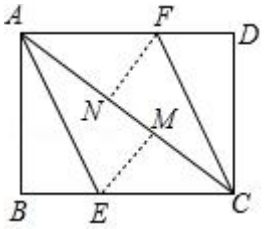
$=\frac{24}{5}$.

【点评】本题主要考查了勾股定理、三角形的面积以及最短路线问题，凡是涉及最短距离的问题，一般要考虑线段的性质定理，结合轴对称变换来解决，多数情况要作点关于某直线的对称点.

11．如图，*AC*为矩形*ABCD*的对角线，将边*AB*沿*AE*折叠，使点*B*落在*AC*上的点*M*处，将边*CD*沿*CF*折叠，使点*D*落在*AC*上的点*N*处.

（1）求证：四边形*AECF*是平行四边形；

（2）若*AB*＝6，*AC*＝10，求四边形*AECF*的面积及*AE*与*CF*之间的距离.



【分析】（1）首先由矩形的性质和折叠的性质证得*AB*＝*CD*，*AD*∥*BC*，∠*ANF*＝90°，∠*CME*＝90°，易得*AN*＝*CM*，由平行四边形的判定定理可得结论；

（2）由*AB*＝6，*AC*＝10，可得*BC*＝8，设*CE*＝*x*，则*EM*＝8﹣*x*，*CM*＝10﹣6＝4，在Rt△*CEM*中，利用勾股定理可解得*x*，由平行四边形的面积公式可得结果.

【解答】（1）证明：∵四边形*ABCD*是矩形，

∴*AD*∥*BC*，*AB*∥*CD*，

∴∠*CAB*＝∠*ACD*.

由折叠的性质可得∠*EAB*＝∠*EAC*，∠*ACF*＝∠*FCD*，

又∵∠*CAB*＝∠*ACD*，

∴∠*EAC*＝∠*ACF*，

∴*AE*∥*CF*，

∴四边形*AECF*是平行四边形；

（2）解：在Rt△*ABC*中，*AB*＝6，*AC*＝10，

则根据勾股定理得，*BC*＝8.

∵*AM*＝*AB*﹣6，

∴*CM*＝*AC*﹣*AM*＝*AC*﹣*AB*＝4.

设 $CE=x$，则 $BE=EM=8-x$，

在 $Rt\triangle EMC$ 中，利用勾股定理可得 $EM^2+CM^2=CE^2$，

即 $(8-x)^2+4^2=x^2$，解得 $x=5$，

故四边形 $AECF$ 的面积 $=AB\cdot CE=6\times5=30$.

在 $Rt\triangle ABE$ 中，由勾股定理得 $AE=3\sqrt{5}$，

设 AE 与 CF 之间的距离为 h，

则 $AE\cdot h=30$，

即 $3\sqrt{5}h=30$，

$\therefore h=2\sqrt{5}$.

【点评】本题主要考查了折叠的性质、矩形的性质、平行四边形的判定定理和勾股定理等，综合运用各定理是解答此题的关键.

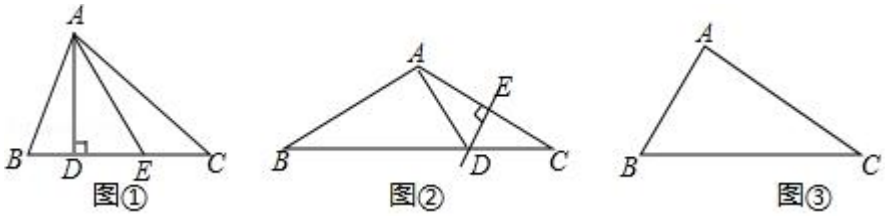
12．问题提出：

（1）如图①，在$\triangle ABC$中，AD是ABC边BC的高，点E是BC上任意点，若$AD=3$，则AE的最小值为__3__；

（2）如图②，在等腰$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$\angle BAC=120°$，DE是AC的垂直平分线，分别交BC、AC于点D、E，$DE=1cm$，求$\triangle ABD$的周长；

问题解决：

（3）如图③，某公园管理员拟在园内规划一个$\triangle ABC$区域种植花卉，且为方便游客游览，欲在各顶点之间规划道路AB、BC和AC，满足$\angle BAC=90°$，点A到BC的距离为$2km$．为了节约成本，要使得AB、BC、AC之和最短，试求$AB+BC+AC$的最小值（路宽忽略不计）.



【分析】（1）根据AD是ABC边BC的高，点E是BC上任意点，$AD=3$，即可求AE的最小值；

（2）根据$AB=AC$，$\angle BAC=120°$，可得$\angle B=\angle C=30°$，根据DE是AC的垂直平分线，可得$AD=CD$，$\angle DAC=\angle C=30°$，$\angle BAD=90°$，根据勾股定理即可求出$\triangle ABD$的周长；

（3）延长CB到点D，使得$AB=DB$，延长BC到点E，使得$CE=AC$，连接AD、AE，DE的最小值即为$AB+BC+AC$的最小值，以DE为斜边向下作等腰直角三角形ODE，以点O为圆心，OD为半径作圆O，$180°-\frac{1}{2}\angle DOE=135°$，可得点$A$在弦$DE$所对的劣弧，过点$A$作$AP\perp DE$于$P$，过点$O$作$OH\perp DE$于$H$，连接$OA$，则$AP=2$，则$AP+OH$

$\leqslant AO$，可得 $2+x\leqslant\sqrt{2}x$，所以 DE 的最小值为 $2x$.

【解答】解：（1）∵AD 是 ABC 边 BC 的高，点 E 是 BC 上任意点，

$AD=3$，则 AE 的最小值为 3，

故答案为：3；

（2）∵$AB=AC$，$\angle BAC=120°$，

∴$\angle B=\angle C=\frac{1}{2}(180°-120°)=30°$，

∵DE 是 AC 的垂直平分线，

∴$AD=CD$，$\angle DAC=\angle C=30°$，

∴$\angle BAD=\angle BAC-\angle DAC=120°-30°=90°$，

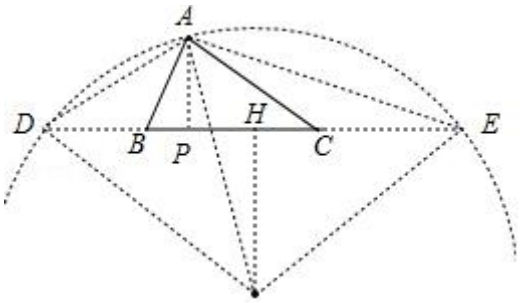
在 $Rt\triangle CDE$ 中，$DE=1cm$，

∴$AD=CD=2DE=2cm$，

在 $RtABD$ 中，$BD=2AD=2CD=4(cm)$，$AB=ADtan60°=2\sqrt{3}(cm)$，

∴$\triangle ABD$ 的周长为：$AD+BD+AB=2+4+2\sqrt{3}=6+2\sqrt{3}(cm)$.

（3）延长 CB 到点 D，使得 $AB=DB$，延长 BC 到点 E，使得 $CE=AC$，连接 AD、AE，



∴$\angle ADB=\angle DAB=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle AEC=\angle CAE=\frac{1}{2}\angle ACB$，$AB+BC+AC=DB+BC+CE=DE$，

∴DE 的最小值即为 $AB+BC+AC$ 的最小值.

∵$\angle DAB+\angle CAE=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)=\frac{1}{2}(180°-\angle BAC)=45°$，

∴$\angle DAE=\angle DAB+\angle CAE+\angle BAC=135°$，

以 DE 为斜边向下作等腰直角三角形 ODE，以点 O 为圆心，OD 为半径作圆 O，$\angle EAD=180°-\frac{1}{2}\angle DOE=135°$，

∴点 A 在弦 DE 所对的劣弧，

过点 A 作 $AP\perp DE$ 于 P，过点 O 作 $OH\perp DE$ 于 H，连接 OA，则 $AP=2$，

设 $DH=x$，则 $DE=2x$，$OH=x$，$OA=OD=\sqrt{2}x$，

则 $AP+OH\leqslant AO$，可得 $2+x\leqslant\sqrt{2}x$，

$\therefore x \geq \frac{2}{\sqrt{2}-1}$.

$\therefore DE$ 的最小值为 $2x=\frac{4}{\sqrt{2}-1}=4\sqrt{2}+4$.

$\therefore AB+BC+AC$ 的最小值为（$4\sqrt{2}+4$）km.

【点评】本题是轴对称综合题，解决本题的关键是综合掌握线段垂直平分线的性质、等腰直角三角形的性质、含 30 度角的直角三角形、勾股定理等知识.