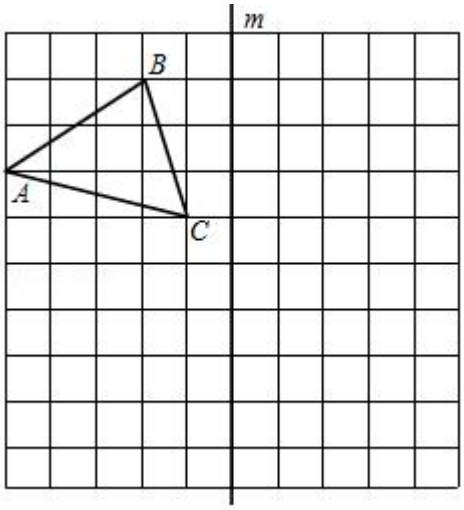
几何变换之翻折（轴对称）巩固练习

1．如图，在正方形网格中，每个小正方形的边长均为 1 个单位，每个小正方形的顶点叫做格点，△ABC的三个顶点都在格点上．

（1）在网格中画出△ABC向下平移 4 个单位得到的△$A_1B_1C_1$．

（2）在网格中画出△ABC关于直线 m 对称的△$A_2B_2C_2$．

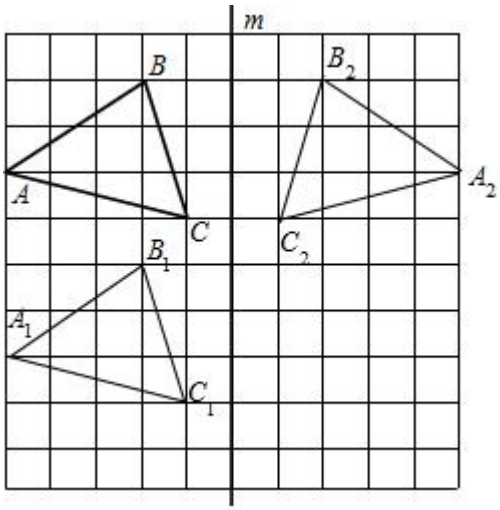


【分析】（1）利用网格特点和平移的性质画出 A、B、C的对应点 A_1、B_1、C_1即可；

（2）利用网格特点和对称的性质画出 A、B、C关于直线 l 的对对称点 A_2、B_2、C_2即可．

【解答】解：（1）如图，△$A_1B_1C_1$为所作；

（2）如图，△$A_2B_2C_2$为所作；



【点评】本题考查了作图－轴对称变换：几何图形都可看做是由点组成，我们在画一个图形的轴对称图形时，也是先从确定一些特殊的对称点开始的，也考查了平移变换．

2．已知点 A（$2a-b$，$5+a$），B（$2b-1$，$-a+b$）．

（1）若点 A，B 关于 x 轴对称，求 a，b 的值；

（2）若点 A，B 关于 y 轴对称，求（$4a+b$）^{2019} 的值．

【分析】（1）根据“关于 x 轴对称的点，横坐标相同，纵坐标互为相反数”列方程组求解即可；

（2）根据“关于 y 轴对称的点，纵坐标相同，横坐标互为相反数；”列方程组求出 a、b 的值，然后代入代数式进行计算即可得解．

【解答】解：（1）∵点 A，B 关于 x 轴对称，

$\therefore \begin{cases} 2a-b=2b-1 \\ 5+a=-(-a+b) \end{cases}$，

解得 $\begin{cases} a=-8 \\ b=-5 \end{cases}$．

（2）∵点 A，B 关于 y 轴对称，

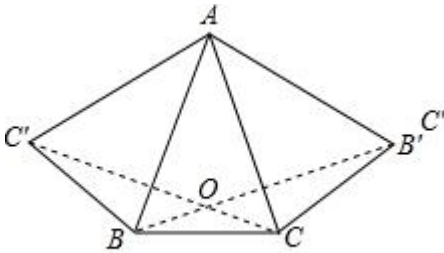
$\therefore \begin{cases} 2a-b=-(2b-1) \\ 5+a=-a+b \end{cases}$，

解得 $\begin{cases} a=-1 \\ b=3 \end{cases}$，

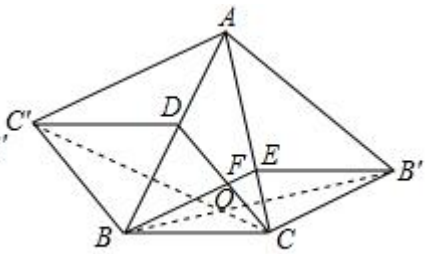
∴（$4a+b$）^{2019}＝[4×（－1）+3]^{2019}＝－1．

【点评】本题考查了关于 x、y 轴对称的点的坐标特征：点 P（x，y）关于 x 轴的对称点 P' 的坐标是（x，$-y$）．点 P（x，y）关于 y 轴的对称点 P' 的坐标是（$-x$，y）．

3．如图，△ABC 的点 C 与 C' 关于 AB 对称，点 B 与 B' 关于 AC 对称，连结 BB'、CC'，交于点 O．



图（1）



图（2）

（1）如图（1），若∠BAC＝30°，

①求∠$B'AC'$ 的度数；

②观察并描述：△ABC' 可以由△$AB'C$ 通过什么变换得来？求出∠BOC' 的角度；

（2）如图（2），若∠BAC＝α，点 D、E 分别在 AB、AC 上，且 $C'D$∥BC∥$B'E$，BE、CD 交于点 F，设∠BFD＝β，试探索 α 与 β 之间的数量关系，并说明理由．

【分析】（1）①利用轴对称的性质求解即可．

②如图（1）中，设 AC 交 BB' 于 J．利用“8 字型”证明∠$B'OC$＝∠BAJ 即可．

（2）如图（2）中，结论：β＝2α．首先证明四边形 $BCDC'$ 是菱形，推出 CD∥BC'，同法可证，BE∥CB'，推出∠FCB+∠CBC'＝180°，即∠FCB+2∠ABC＝180°，同法可得，∠FBC+2∠ACB＝180°，再根据∠BFD＝

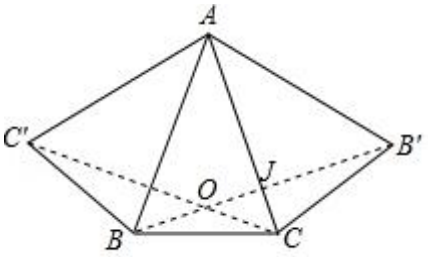
∠FBC+∠FCB转化可得结论.

【解答】解：（1）①∵C，C′关于AB对称，B，B′关于AC对称，

∴∠CAB=∠BAC′=∠CAB′=30°，

∴∠B′AC′=90°.

②如图（1）中，设AC交BB′于J.



图（1）

△ABC′可以由△AB′C绕点A顺时针旋转60°得到.

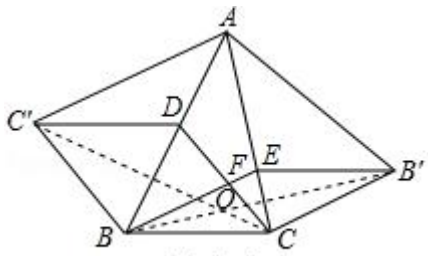
∵AC=AC′，AB=AB′，∠CAC′=∠BAB′=60°，

∴∠AB′A=∠ACO=60°，

∵∠AJB′=∠OJC，

∴∠B′OC=∠B′AJ=30°.

（2）如图（2）中，结论：β=2α.



图（2）

理由：由对称的性质可知：BC=BC′，DC′=DC，∠ABC′=∠ABC，

∵DC′∥BC，

∴∠C′DB=∠ABC=∠C′BD，

∴C′D=C′B，

∴BC=BC′=C′D=DC，

∴四边形BCDC′是菱形，

∴CD∥BC′，同法可证，BE∥CB′，

∴∠FCB+∠CBC′=180°，即∠FCB+2∠ABC=180°，

同法可得，∠FBC+2∠ACB=180°，

∵∠*BFD*＝∠*FBC*+∠*FCB*,

∴∠*DFB*＝180°－2∠*ABC*+180°－2∠*ACB*＝360°－2（∠*ABC*+∠*ACB*）＝360°－2（180°－∠*BAC*）＝2∠*BAC*,

∴β＝2α.

【点评】本题考查轴对称的性质，菱形的判定和性质，等腰三角形的判定和性质，旋转变换等知识，解题的关键是理解题意，灵活运用所学知识解决问题.

4．请在网格中完成下列问题：

（1）如图 1，网格中的△*ABC* 与△*DEF* 为轴对称图形，请用所学轴对称的知识作出△*ABC* 与△*DEF* 的对称轴 *l*；

（2）如图 2，请在图中作出△*ABC* 关于直线 *MN* 成轴对称的图形△*A*′ *B*′ *C*′ .

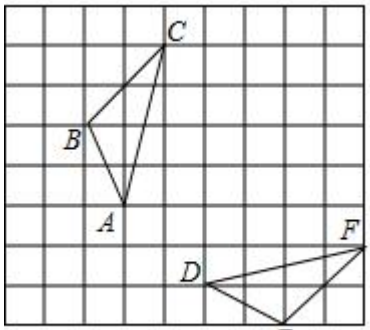


图1

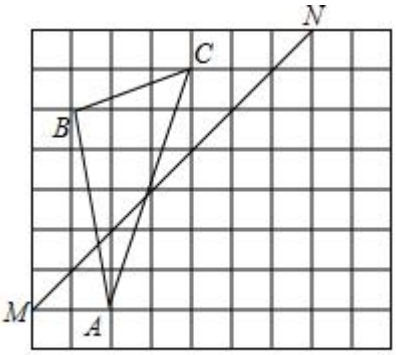


图2

【分析】（1）利用网格特点，作 *AD* 的垂直平分线即可；

（2）利用网格特点，分别作 *A*、*B*、*C* 关于直线 *MN* 的对称点 *A*′ 、*B*′ 、*C*′ ，从而得到△*A*′ *B*′ *C*′ .

【解答】解：（1）如图 1，直线 *PQ* 为所作；

（2）如图 2，△*A*′ *B*′ *C*′ 为所作.

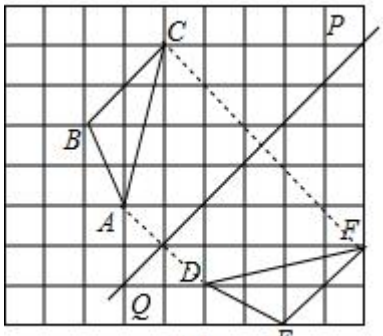


图1

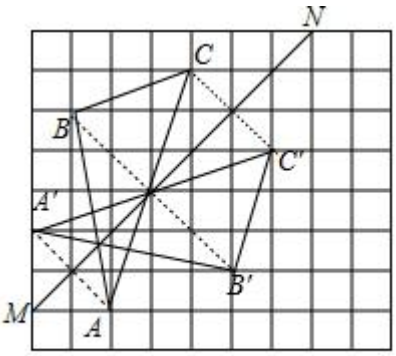
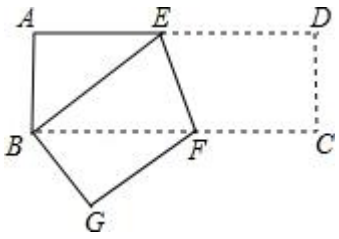


图2

【点评】本题考查了作图－轴对称变换：在画一个图形的轴对称图形时，也是先从确定一些特殊的对称点开始的，一般的方法是：由已知点出发向所给直线作垂线，并确定垂足；直线的另一侧，以垂足为一端点，

作一条线段使之等于已知点和垂足之间的线段的长，得到线段的另一端点，即为对称点；连接这些对称点，就得到原图形的轴对称图形.

5．如图，在矩形纸片 $ABCD$ 中，$AD=9$，$AB=3$，将其折叠，使点 D 与点 B 重合，折痕为 EF，求折叠后 DE 的长和折痕 EF 的长.



【分析】作 $FM\perp AD$ 于 M，则 $\angle FME=90°$，$FM=AB=3cm$，由折叠的性质得出 $BE=DE$，$\angle BEF=\angle DEF$，再求出 $BF=BE$，设 $AE=x$，则 $BE=DE=9-x$，根据勾股定理得出方程，解方程求出 AE，得出 DE、BF、EM，根据勾股定理求出 EF 即可，

【解答】解：作 $FM\perp AD$ 于 M，

则 $\angle FME=90°$，$FM=AB=3$，

根据题意得：$BE=DE$，$\angle BEF=\angle DEF$，

∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴$\angle A=90°$，$AD// BC$，

∴$\angle BFE=\angle DEF$，

∴$\angle BEF=\angle BFE$，

∴$BF=BE$，

设 $AE=x$，则 $BE=DE=BF=9-x$，

根据勾股定理得：

$AB^2+AE^2=BE^2$，即 $3^2+x^2=(9-x)^2$，

解得：$x=4$，

∴$AE=4$，

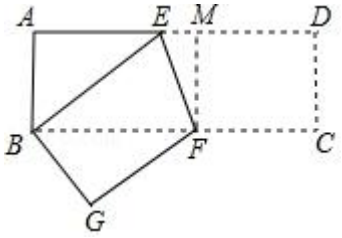
∴$DE=BF=5$，

∴$CF=DM=4$，

∴$EM=1$，

根据勾股定理得：$EF=\sqrt{EM^2+FM^2}=\sqrt{10}$，

答：DE 的长为 5，折痕 EF 的长为 $\sqrt{10}$.

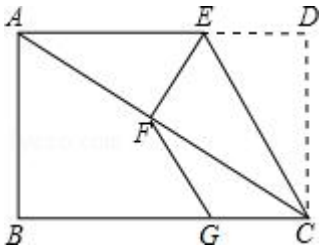


【点评】本题考查了翻折变换的性质、矩形的性质、勾股定理、等腰三角形的判定；熟练掌握翻折变换和矩形的性质，并能进行推理计算是解决问题的关键.

6．如图，已知点 E 是矩形一边 AD 上的一点，沿 CE 折叠矩形使点 D 落在对角线 AC 上的点 F 处，点 G 为 BC 上一点，且 $CG=DE$，连 FG.

（1）求证：$FG/\!/EC$;

（2）若 $\angle DAC=30°$，$CD=4$，求四边形 $EFGC$ 的面积.



【分析】（1）作 $FN/\!/AD$ 交 EC 于 N，根据翻折变换的性质证明四边形 $EFGC$ 是平行四边形，根据平行四边形的性质证明即可；

（2）作 $FM\perp BC$ 于 M，根据直角三角形的性质和翻折变换的性质分别求出 $\triangle EFC$ 的面积和 $\triangle GFC$ 的面积即可.

【解答】（1）证明：作 $FN/\!/AD$ 交 EC 于 N，

则 $FN/\!/BC$，$\angle DEC=\angle ENF$，

由折叠的性质可知，$\angle DEC=\angle FEN$，$FE=DE$，

$\therefore\angle FEN=\angle FNE$，

$\therefore FE=FN$，又 $CG=DE$，

$\therefore FN=CG$，又 $FN/\!/BC$，

$\therefore$四边形 $NFGC$ 是平行四边形，

$\therefore FG/\!/EC$;

（2）作 $FM\perp BC$ 于 M，

$\because\angle DAC=30°$，

$\therefore\angle ACD=60°$，

$\therefore\angle DCE=\angle FCE=30°$，又 $CD=4$，

∴$DE=\frac{4\sqrt{3}}{3}$,

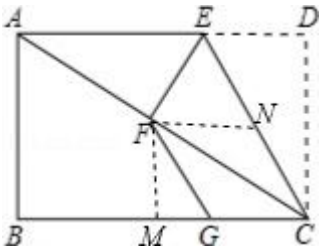
∴△EFC的面积＝△EDC的面积$=\frac{1}{2}\times4\times\frac{4\sqrt{3}}{3}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$,

∵∠ACB＝90°－∠ACD＝30°，

∴$FM=\frac{1}{2}FC=2$，

∴△FGC的面积$=\frac{1}{2}\times2\times\frac{4\sqrt{3}}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$,

∴四边形$EFGC$的面积＝△EFC的面积+△GFC的面积＝$4\sqrt{3}$.

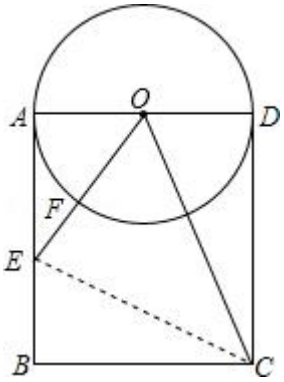


【点评】本题考查的是翻折变换和平行四边形的判定，掌握翻折变换是一种对称变换，它属于轴对称，折叠前后图形的形状和大小不变，位置变化，对应边和对应角相等是解题的关键.

7．如图所示，正方形$ABCD$的边长为2，⊙O的直径为AD．将正方形沿EC折叠，点B落在⊙O上F点．

（1）求证：E，F，O三点共线；

（2）求线段BE及AF的长．



【分析】（1）连接CF、BF，证明△OFC≌△ODC，得到∠OFC＝90°，根据平角的概念证明结论；

（2）设$BE=x$，根据勾股定理列出方程，解方程得到BE的长；证明△AFD∽△ODC，根据相似三角形的性质得到比例式求出AF的长.

【解答】解：（1）连接CF、BF，

由题意得，∠EFC＝∠ABC＝90°，

∵$CF=CB$，$CB=CD$，

∴$CF=CD$，

在△OFC和△ODC中，

$$\begin{cases} OF = OD \\ CF = CD \\ OC = OC \end{cases},$$

∴△OFC≌△ODC，

∴∠OFC＝∠ADC＝90°，

∴∠$EF0$＝180°，

∴E，F，O三点共线；

（2）设BE＝x，则EF＝x，AE＝2﹣x，

∵$AE^2+OA^2=OE^2$　　，

∴（2﹣x）^{2}+1＝（x+1）^{2}，

解得，$x=\frac{2}{3}$，即$BE=\frac{2}{3}$；

连接AF、DF，

$OC=\sqrt{CD^2+OD^2}=\sqrt{5}$，

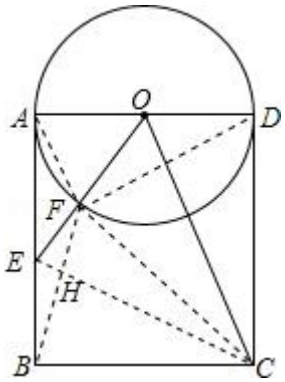
∵AD为⊙O的直径，

∴∠AFD＝90°，又∠ODC＝90°，

∴△AFD∽△ODC，

∴$\frac{AF}{OD}=\frac{AD}{OC}$，即$\frac{AF}{1}=\frac{2}{\sqrt{5}}$，

解得$AF=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.



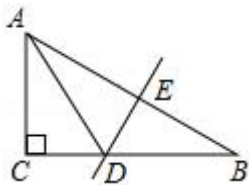
【点评】本题考查的是翻折变换的性质、正方形的性质和相似三角形的判定和性质，掌握折叠前后图形的形状和大小不变，位置变化，对应边和对应角相等是解题的关键.

8．如图，在Rt△ABC中，∠C＝90°，边AB的垂直平分线交BC于点D，垂足为E，AD平分∠BAC.

（1）求∠B的度数；

（2）求证：$CD=\frac{1}{3}BC$；

（3）若 $AC=2$，点 P 是直线 AD 上的动点，求 $|PB-PC|$ 的最大值．



【分析】（1）根据线段垂直平分线上的点到线段两端点的距离相等可得 $AD=BD$，根据等边对等角可得 $\angle BAD=\angle B$，然后利用直角三角形两锐角互余列式求出 $\angle CAD=\angle BAD=\angle B=30°$；

（2）根据直角三角形 30° 角所对的直角边等于斜边的一半可得 $AD=2CD$，根据 $AD=BD$，从而得出 $BD=2CD$，得出 $BC=BD+CD=3CD$，即可证得 $CD=\frac{1}{3}BC$；

（3）作 C 点关于直线 AD 的对称点 C'，作直线 BC' 交 AD 于 P，此时 $|PB-PC|$ 的值最大，最大值为 AC 的长．

【解答】解：（1）∵DE 是 AB 的垂直平分线，

∴$AD=BD$，

∴$\angle BAD=\angle B$，

∵AD 平分 $\angle BAC$，

∴$\angle CAD=\angle BAD$，

∵$\angle C=90°$，

∴$\angle B+2\angle B=90°$，

∴$\angle B=30°$．

（2）∵$\angle CAD=\angle BAD=\angle B=30°$，

∴$AD=2CD$，

∵$AD=BD$，

∴$BD=2CD$，

∴$BC=BD+CD=3CD$，

∴$CD=\frac{1}{3}BC$；

（3）作 C 点关于直线 AD 的对称点 C'，

∵AD 平分 $\angle BAC$．

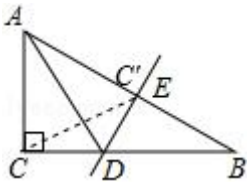
∴C' 在直线 AB 上，连接 BC' 的直线就是 AB，

∴P 点就是 A 点，

此时$|PB-PC|$的最大值为AC'，

∵$AC=AC'$，

∴$|PB-PC|$的最大值$=2$.

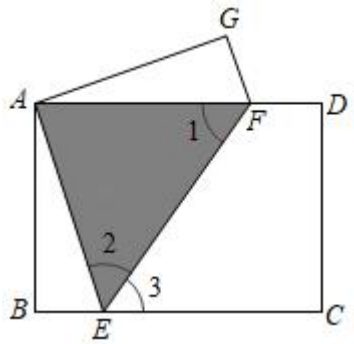


【点评】本题考查了线段垂直平分线上的点到线段两端点的距离相等的性质，角平分线上的点到角的两边的距离相等的性质，等边对等角的性质，轴对称的性质以及三角形的内角和定理，熟记各性质是解题的关键.

9．如图，在长方形纸片$ABCD$中，$AB=12$，$BC=18$，将纸片折叠压平，使点C与点A重合，折痕为EF.

（1）求证：$AF=AE$.

（2）求线段AF的长.



【分析】（1）由折叠的性质可得$AE=CE$，$\angle CEF=\angle AEF$，由矩形的性质和平行线的性质可得$\angle AFE=\angle FEC=\angle CEF$，可得结论；

（2）由勾股定理可求AE的长，即可求解.

【解答】证明：（1）由折叠的性质可得$AE=CE$，$\angle CEF=\angle AEF$，

∵四边形$ABCD$是矩形，

∴$AD//BC$，

∴$\angle AFE=\angle FEC$，

∴$\angle AFE=\angle AEF$，

∴$AF=AE$；

（2）∵$AE^2=AB^2+BE^2$，

∴$AE^2=144+(18-AE)^2$，

∴AE＝13，

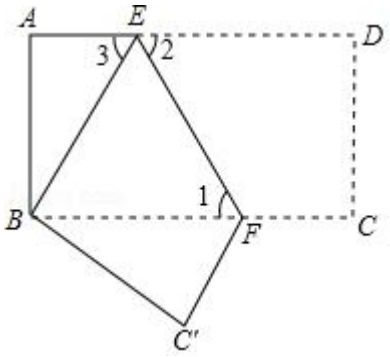
∴AF＝AE＝13．

【点评】本题考查了翻折变换的性质，矩形的性质，勾股定理，锐角三角函数的定义，全等三角形的判定与性质，熟记各性质是解题的关键．

10．如图，把长方形纸片 $ABCD$ 沿 EF 折叠后，使得点 D 与点 B 重合，点 C 落在点 C' 的位置上．

（1）若∠1＝50°，求∠2，∠3 的度数；

（2）若 AB＝4，AD＝8，求 AE 的长度．



【分析】（1）由矩形的性质及平行线的性质可得出答案；

（2）设 AE＝x，则 DE＝8－x，由勾股定理得出 $x^2+4^2=(8-x)^2$，解方程即可得出答案．

【解答】解：（1）∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴AD∥BC，

∴∠1＝∠2＝50°．

又∠2＝∠BEF，

∴∠3＝180°－50°－50°＝80°；

（2）设 AE＝x，则 DE＝8－x，

由翻折得：BE＝DE＝8－x，

在 Rt△AEB 中，$AE^2+AB^2=BE^2$，

∴$x^2+4^2=(8-x)^2$，

∴x＝3，

∴AE＝3．

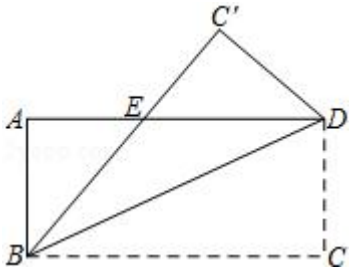
【点评】本题考查了矩形的性质，折叠的性质，勾股定理，平行线的性质，熟练掌握折叠的性质是解题的关键．

11．如图，将长方形 $ABCD$ 沿着对角线 BD 折叠，使点 C 落在 C' 处，BC' 交 AD 于点 E．AB＝4，AD＝8．

（1）试判断△BDE 的形状，并说明理由；

（2）求 DE 的长．

（3）求△BDE 的面积．



【分析】（1）由折叠可知，$\angle CBD=\angle EBD$，再由 $AD// BC$，得到$\angle CBD=\angle EDB$，即可得到$\angle EBD=\angle EDB$，于是得到 $BE=DE$，等腰三角形即可证明；

（2）设 $DE=x$，则 $BE=x$，$AE=8-x$，在 Rt△ABE 中，由勾股定理求出 x 的值，则可得出答案；

（3）由三角形的面积公式求出面积的值．

【解答】解：（1）△BDE 是等腰三角形．

理由：由折叠可知，$\angle CBD=\angle EBD$，

∵$AD// BC$，

∴$\angle CBD=\angle EDB$，

∴$\angle EBD=\angle EDB$，

∴$BE=DE$，

即△BDE 是等腰三角形；

（2）设 $DE=x$，则 $BE=x$，$AE=8-x$，

在 Rt△ABE 中，由勾股定理得：$AB^2+AE^2=BE^2$ 即 $4^2+(8-x)^2=x^2$，

解得：$x=5$，

∴$DE=5$；

（3）∵$DE=5$，$AB=4$，

∴$S_{\triangle BDE}=\frac{1}{2}DE\times AB=\frac{1}{2}\times5\times4=10$．

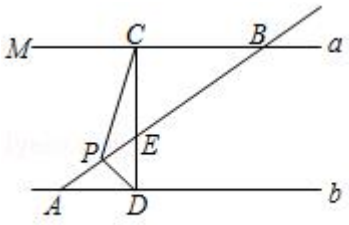
【点评】本题主要考查翻折变换的知识点，解答本题的关键是熟练掌握等腰三角形的判定与勾股定理的知识．

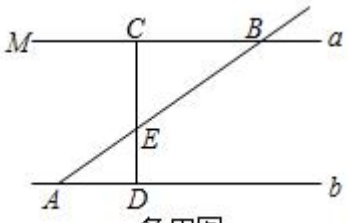
12．如图，直线 $a// b$，点 A，点 D 在直线 b 上，射线 AB 交直线 a 于点 B，$CD\perp a$ 于点 C，交射线 AB 于点 E，$AB=12cm$，AE：$BE=1$：2，P 为射线 AB 上一动点，P 从 A 点开始沿射线 AB 方向运动，速度为 $1cm/s$，设点 P 运动时间为 t，M 为直线 a 上一定点，连接 PC，PD．

（1）当 $t=m$ 为何值时，$PC+PD$ 有最小值，求 m 的值；

（2）当 $t<m$（m 为（1）中的取值）时探究 $\angle PCM$、$\angle PDA$ 与 $\angle CPD$ 的关系，并说明理由；

（3）当 $t>m$（m 为（1）中的取值）时，直接写出 $\angle PCM$、$\angle PDA$ 与 $\angle CPD$ 的关系．





备用图

【分析】（1）根据 P、C、D 三点共线时，即点 P 与点 E 重合时 $PC+PD$ 的值最小，解答即可；

（2）当 $t<m$ 时，迠 P 在 AE 上，过点 P 作 $PH// a// b$，根据平行线的性质可得结论；

（3）当 $t>m$ 时，迠 P 在 BE 上，过点 P 作 $PH// a// b$，根据平行线的性质可得结论．

【解答】解：（1）在△PCD 中，$PC+PD\geqslant CD$，

当取等号时，P，C，D 在同一条直线上，即点 P 与点 E 重合，

此时 $PC+PD$ 最小，

∴$AP=AE$，

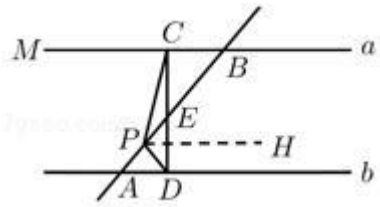
∵AE：$BE=1$：2，$AB=12cm$，

∴$AE=\frac{1}{3}AB=4cm$，

∴$t=\frac{AP}{1}=\frac{4}{1}=4s$，

故 $m=4$ 时，$PC+PD$ 有最小值；

（2）当 $t<m$ 即 $t<4$ 时，点 P 在 AE 上，过点 P 作 $PH// a$，如图：



又∵$a// b$，

∴$PH// a// b$，

∴$\angle PCM=\angle CPH$，$\angle PDA=\angle DPH$，

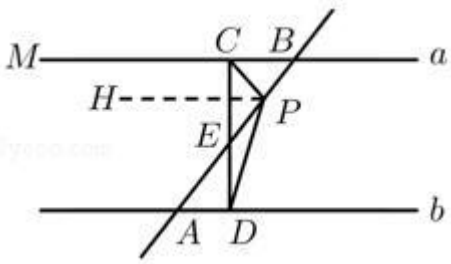
∴$\angle PCM+\angle PDA=\angle CPH+\angle DPH$，

∵$\angle CPD=\angle CPH+\angle DPH$，

∴$\angle PCM+\angle PDA=\angle CPD$，

∴当 $t<4$ 时，$\angle PCM+\angle PDA=\angle CPD$;

（3）当 $t>m$ 即 $t>4$ 时，点 P 在 BE 上，过点 P 作 $PH// a$，如图：



又∵$a// b$，

∴$PH// a// b$，

∴$\angle PCM+\angle CPH=180°$，$\angle PDA+\angle DPH=180°$，

∴$\angle PCM+\angle CPH+\angle PDA+\angle DPH=360°$，

又∵$\angle CPD=\angle CPH+\angle DPH$，

∴$\angle PCM+\angle CPD+\angle PDA=360°$，

即当 $t>4$ 时，$\angle PCM+\angle CPD+\angle PDA=360°$．

【点评】本题主要考查平行线的性质，熟练掌握平行线的性质是解题的关键．