弦图模型巩固练习

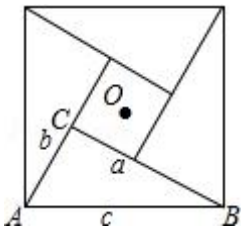
1．在 Rt△ABC 中，∠ACB＝90°，BC＝a，AC＝b．AB＝c，将 Rt△ABC 绕点 O 依次旋转 90°、180° 和 270°，构成的图形如图所示，该图是我国古代数学家赵爽制作的“勾股圆方图”，也被称作“赵爽弦图”，它是我国最早对勾股定理证明的记载，也成为了 2002 年在北京召开的国际数学家大会的会标设计的主要依据．

（1）请你利用这个图形证明勾股定理．

（2）请你利用这个图形说明 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，并说明等号成立的条件．

（3）设 $a=\sqrt{x}$，$b=\sqrt{y}$，代入 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 中，你能得到什么结论？

根据你得到的结论解决下面的问题：长为 x，宽为 y 的矩形，其周长为 16，请问当 x，y 取何值时，该矩形面积最大？最大面积是多少？



2．如图 1，在计算阴影部分面积时，我们可以用边长为 a 的大正方形面积减去边长为 b 的小正方面积，即：$S=a^2-b^2$．我们也可以把图中阴影部分剪下一个小长方形，然后按图 2 把阴影部分拼接成一个长为（$a+b$），宽为（$a-b$）的长方形来计算面积，即：$S=(a+b)(a-b)$，因为阴影部分的面积相等，我们可以得到 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$，这恰好验证了平方差公式．

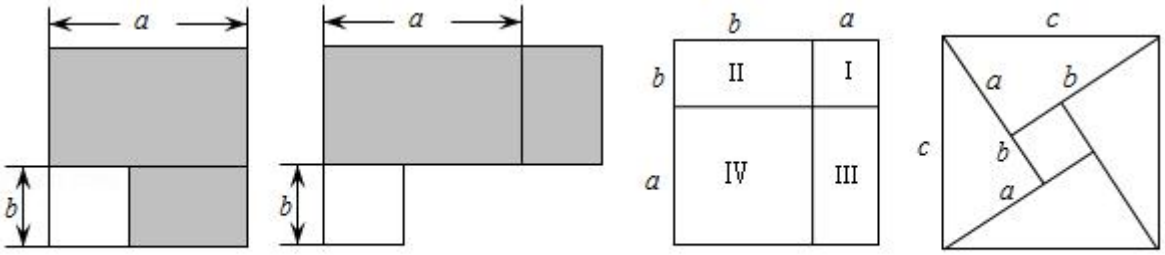


图1　图2　图3　图4

（1）图 3 中最大正方形的面积算法也可以验证一个乘法公式，请用含 a 和 b 的代数式写出这个公式：

_____．

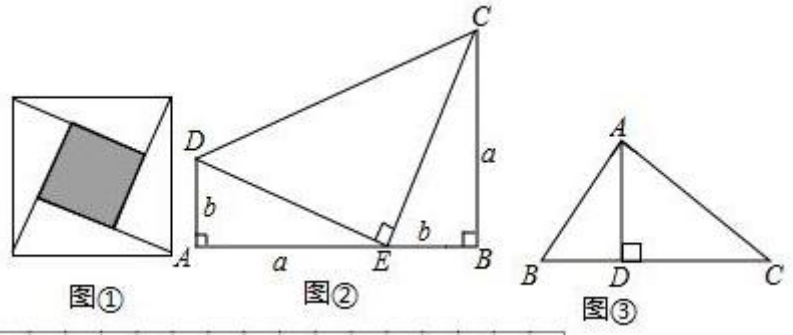
（2）图 4 是著名的“赵爽弦图”，它是由四个形状大小完全一致的直角三角形拼成，每个直角三角形的两直角边的长分别为 a 和 b，斜边长为 c，我国古代数学家赵爽利用此图验证了直角三角形的斜边 c 和两直角边 a 和 b 之间存在一个固定的等量关系，请你求出关于 a、b、c 的关系式．

3．教材在探索平方差公式时利用了面积法，面积法除了可以帮助我们记忆公式，还可以直观地推导或验证公式，俗称“无字证明”，例如，著名的赵爽弦图（如图①，其中四个直角三角形较大的直角边长都为 a，较小的直角边长都为 b，斜边长都为 c），大正方形的面积可以表示为 c），也可以表示为 $4\times\frac{1}{2}ab+(a-b)^2$，由此推导出重要的勾股定理：如果直角三角形两条直角边长为 a，b，斜边长为 c，则 $a^2+b^2=c^2$.

（1）图②为美国第二十任总统伽菲尔德的“总统证法”，请你利用图②推导勾股定理.

（2）如图③，在△ABC中，AD是 BC边上的高，$AB=4$，$AC=5$，$BC=6$，设 $BD=x$，求 x 的值.

（3）试构造一个图形，使它的面积能够解释（$a+b$）（$a+2b$）$=a^2+3ab+2b^2$，画在如图 4 的网格中，并标出字母 a，b 所表示的线段.



图①　图②　图③

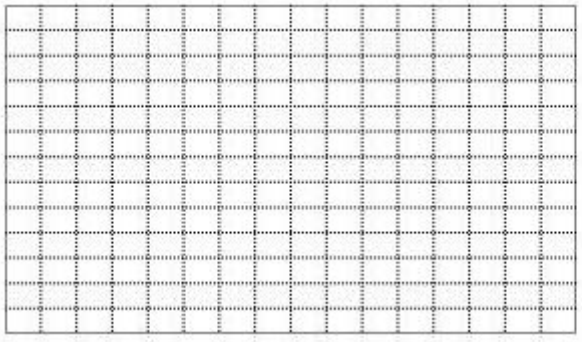


图4

4．我国古代数学家赵爽曾用图 1 证明了勾股定理，这个图形被称为“弦图”.2002 年在北京召开的国际数学家大会（*ICM*2002）的会标（图 2），其图案正是由“弦图”演变而来.“弦图”是由 4 个全等的直角三角形与一个小正方形组成，恰好拼成一个大正方形请你根据图 1 解答下列问题：

（1）叙述勾股定理（用文字及符号语言叙述）；

（2）证明勾股定理；

（3）若大正方形的面积是 13，小正方形的面积是 1，求（$a+b$）^{2}的值．

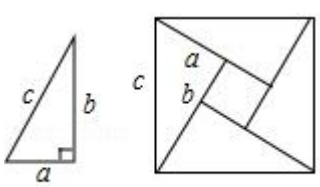
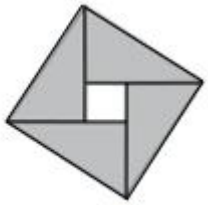


图1


图2

5．公元 3 世纪初，我国数学家赵爽证明勾股定理的图形称为“弦图”．1876 年美国总统 *Garfeild* 用图 1（点 C、点 B、点 C' 三点共线）进行了勾股定理的证明．△ACB 与△$BC'B'$ 是一样的直角三角板，两直角边长为 a，b，斜边是 c．请用此图证明勾股定理．

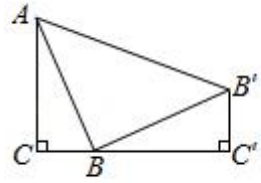


图1

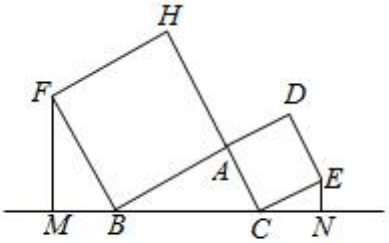


图2

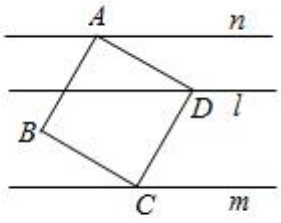


图3

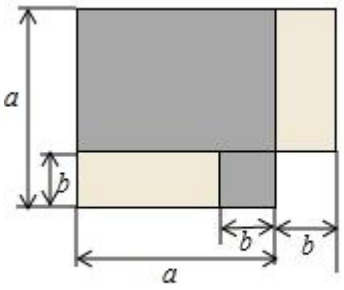
拓展应用 l：如图 2，以△ABC 的边 AB 和边 AC 为边长分别向外做正方形 $ABFH$ 和正方形 $ACED$，过点 F、E 分别作 BC 的垂线段 FM、EN，则 FM、EN、BC 的数量关系是怎样？直接写出结论_____．

拓展应用 2：如图 3，在两平行线 m、n 之间有一正方形 $ABCD$，已知点 A 和点 C 分别在直线 m、n 上，过点 D 作直线 l∥n∥m，已知 l、n 之间距离为 1，l、m 之间距离为 2．则正方形的面积是_____．

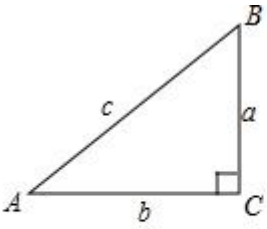
6．通过整式乘法的学习，我们进一步了解了利用图形面积来说明法则、公式等的正确性的方法，例如利用图甲可以对平方差公式（$a+b$）（$a-b$）＝a^2-b^2给予解释．

图乙中的△ABC是一个直角三角形，∠C＝90°，人们很早就发现直角三角形的三边a，b，c满足$a^2+b^2=c^2$的关系．

图丙是2002年国际数学家大会的会徽，选定的是我国古代数学家赵爽用来证明勾股定理的弦图，弦图是由四个全等的直角三角形和中间的小正方形拼成的一个大正方形．如果大正方形的面积是13，小正方形的面积是1，直角三角形的较短直角边长为a，较长直角边长为b，求出（$a+b$）^{2}的值．



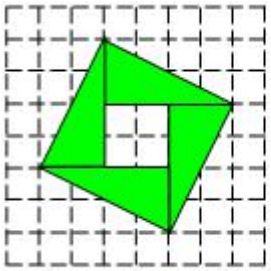
图甲

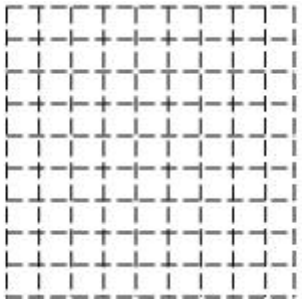


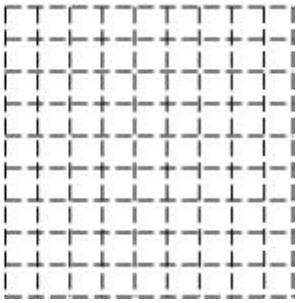
图乙


图丙

7．下图是“弦图”，请将“弦图”中的四个直角三角形通过你所学过的图形变换，在以下方格纸中设计另两个不同的图案．

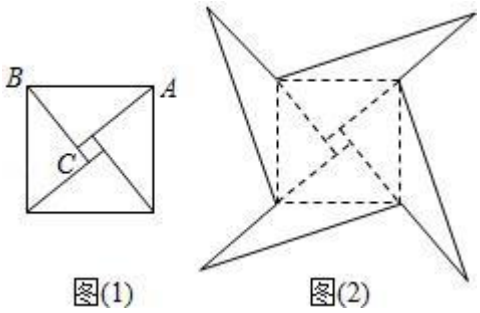






画图要求：（1）每个直角三角形的顶点均在方格纸的格点上，且四个三角形不重叠；（2）所设计的图案（不含方格纸）必须是中心对称图形或轴对称图形．

8．图 1 是我国古代著名的“赵爽弦图”的示意图，它是由四个全等的直角三角形围成的．若 $AC=6$，$BC=5$，将四个直角三角形中边长为 6 的直角边分别向外延长一倍，得到图 2 所示的“数学风车”，则这个风车的外围周长是多少？



图(1)　　图(2)