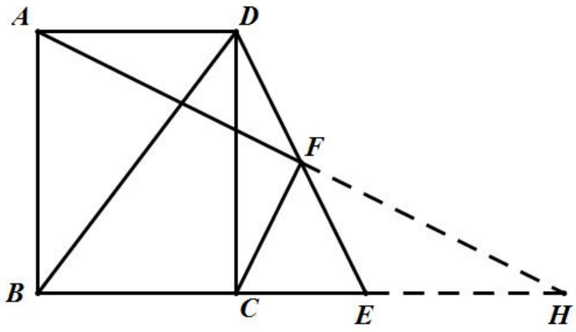
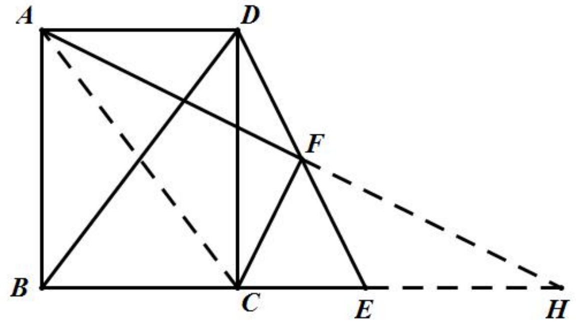
倍长中线模型知识精讲

1. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，若 $BD=BE$，$DF=EF$，则 $AF\perp CF$.



证明：连接 AC，如图所示：



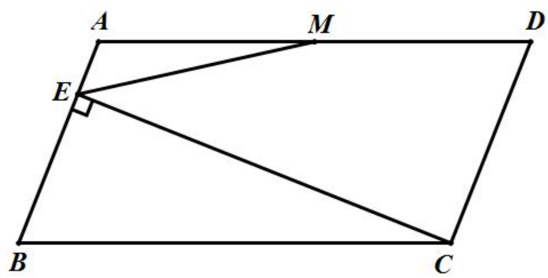
由题意可证$\triangle ADF\cong\triangle HEF$，$\therefore AD=BC=EH$，

$\because$四边形 $ABCD$ 是矩形，$\therefore AC=BD$，

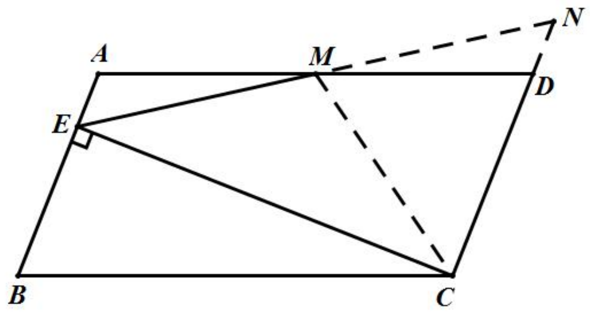
又$\because BD=BE$，$\therefore AC=CH$，

$\because AF=FH$，$\therefore$点 F 是 AH 的中点，$\therefore AF\perp CF$（三线合一）.

2. 如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$BC=2AB$，M 为 AD 的中点，$CE\perp AB$ 于点 E，则$\angle DME=3\angle AEM$.



法一、证明：延长 EM 交 CD 的延长线于点 N，连接 CM，如图所示：



∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∴∠AB∥CD，∴∠AEM＝∠N，

在△AEM 与△DNM 中，$\begin{cases} \angle AEM = \angle N \\ AM = DM \\ \angle AME = \angle DMN \end{cases}$，∴△$AEM$∽△$DNM$（$ASA$），∴$EM$＝$MN$，

又∵AB∥CD，CE⊥AB，∴CE⊥CD，∴CM 是 Rt△ECN 斜边的中线，

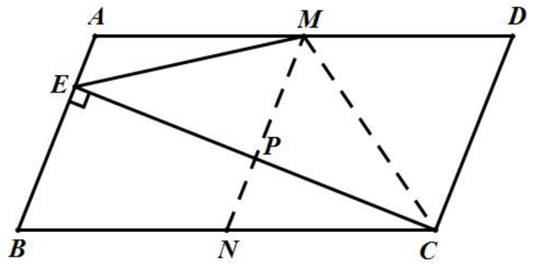
∴MN＝MC，∠N＝∠MCN，∴∠EMC＝2∠N＝2∠AEM，

∵在平行四边形 $ABCD$ 中，BC＝AD＝2DM，BC＝2AB＝2CD，∴DC＝MD，

∴∠DMC＝∠MCD＝∠N＝∠AEM，

∴∠EMD＝∠EMC＋∠CMD＝2∠AEM＋∠AEM，∴∠EMD＝3∠AEM.

法二、证明：设 BC 的中点为 N 点，连接 MN 交 EC 于点 P，连接 MC，如图所示：



由题意可得 AM＝BN，MD＝NC，

∵BC＝2AB，∴四边形 $ABNM$ 与四边形 $MNCD$ 均为菱形，

∴MN∥AB，∠AEM＝∠EMN，

∵CE⊥AB，∴MN⊥CE，

又∵AM＝MD，MN∥AB，∴点 P 为 EC 的中点，

∴MP 垂直平分 EC，∴∠EMN＝∠NMC，

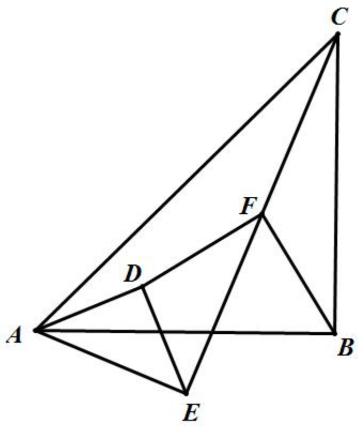
又∵四边形 $MNCD$ 是菱形，∴∠NMC＝∠CMD，

∴∠EMD＝3∠EMN＝3∠AEM.

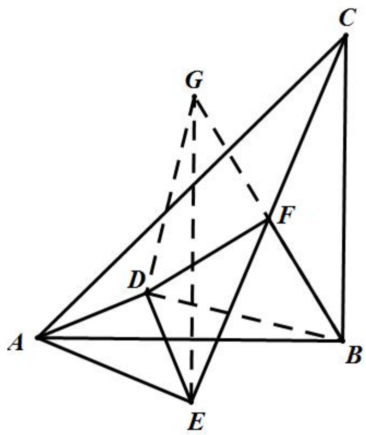
3.　如图，△ADE 与△ABC 均为等腰直角三角形，且 EF＝CF　　，求证

（1）DF＝BF;

（2）$DF \perp BF$.



证明：延长 BF 至点 G，使得 $FG=FB$，连接 BD、DG、EG，如图所示：



在△EFG 与△CFB 中，$\begin{cases} FG=BF \\ \angle EFG=\angle CFB \\ EF=CF \end{cases}$，∴△$EFG$≌△$CFB$，

∴$EG=CB$，$\angle EGF=\angle CBF$，∴$EG /\!/ BC$，

∵$AB=BC$，$AB \perp CB$，∴$EG=AB$，$EG \perp AB$，

又∵$\angle AED=\angle DAE$，∴$\angle DAB=\angle DEG$，

在△DAB 与△DEG 中，$\begin{cases} AD=DE \\ \angle DAB=\angle DEG \\ AB=EG \end{cases}$，∴△$DAB$≌△$DEG$，

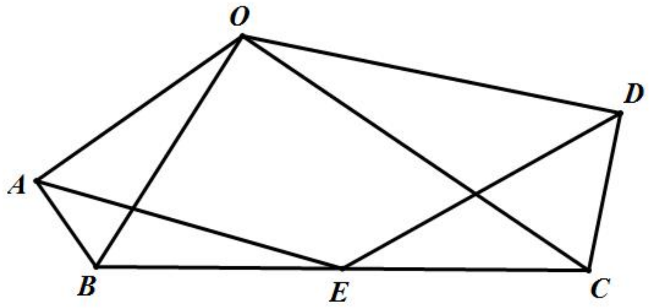
∴$DG=DB$，$\angle ADB=\angle EDG$，∴$\angle BDG=\angle ADE=90^{o}$，

∴△BGD 为等腰直角三角形，∴$DF=BF$ 且 $DF \perp BF$.

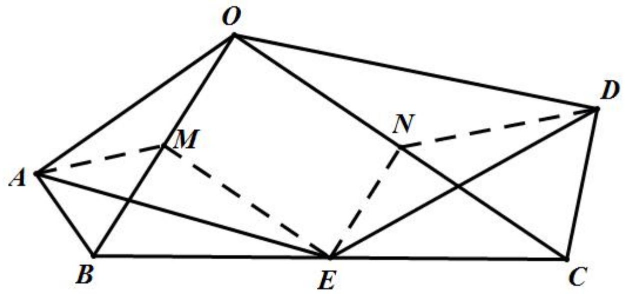
4. 如图，△OAB∽△ODC，$\angle OAB=\angle ODC=90^{o}$，$BE=EC$，求证：

（1）$AE=DE$；

（2）$\angle AED=2\angle ABO$.



证明：（1）取 OB、OC 的中点 M、N，连接 AM、EM、EN、DN，如图所示：



∵$\angle BAO=\angle ODC=90^{o}$，$BM=MO$，$CN=NO$，

∴$AM=OM=BM$，$DN=CN=NO$，$OM\parallel EN$，$EM\parallel ON$，∴四边形 $OMEN$ 为平行四边形，

∴$OM=EN$，$EM=ON$，

∴$AM=EN$，$EM=DN$，$\angle MAO=\angle AOB$，$\angle NDO=\angle DON$，

∵$\angle AMB=\angle MAO+\angle AOB$，$\angle DNC=\angle DON+\angle NDO$，∴$\angle AMB=\angle DNC$，

∵$\angle BME=\angle BOC=\angle ENC$，∴$\angle AMB+\angle BME=\angle DNC+\angle CNE$，∴$\angle AME=\angle DNE$，

在△AME 与△END 中，$\left\{\begin{array}{c} AM=EN \\ \angle AME=\angle DNE \\ EM=DN \end{array}\right.$，∴△$AME$≌△$END$，∴$AE=DE$；

（2）由（1）可得△AME≌△END，∴$\angle MAE=\angle NED$，$\angle AEM=\angle EDN$，

∵$\angle AED=\angle AEM+\angle MEN+\angle NED=\angle AEM+\angle EMB+\angle EAM$，

又∵$\angle MAB=\angle MBA$，∴$\angle AMB+2\angle ABO=180^{o}$，$\angle AMB+$（$\angle MAE+\angle AEM+\angle EMB$）$=180^{o}$，

∴$\angle MAE+\angle AEM+\angle EMB=2\angle ABO$，∴$\angle AED=2\angle ABO$.