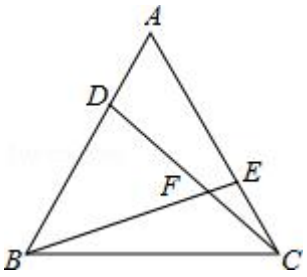
全等模型巩固练习

1. 如图，△ABC 中，$AB=BC=CA$，$\angle A=\angle ABC=\angle ACB$，在△$ABC$ 的顶点 A，C 处各有一只小蚂蚁，它们同时出发，分别以相同速度由 A 向 B 和由 C 向 A 爬行，经过 t（s）后，它们分别爬行到了 D，E 处，设 DC 与 BE 的交点为 F.

（1）证明△ACD≌△CBE；

（2）小蚂蚁在爬行过程中，DC 与 BE 所成的∠BFC 的大小有无变化？请说明理由.



【解答】（1）见解析；（2）∠BFC 无变化

【解析】（1）证明：∵小蚂蚁同时从 A、C 出发，速度相同，

∴t（s）后两只小蚂蚁爬行的路程 $AD=CE$，

∵在△ACD 和△CBE 中，

$$\begin{cases} AD=CE \\ \angle A=\angle ACB, \\ AC=CB \end{cases}$$

∴△ACD≌△CBE（SAS）；

（2）∵△ACD≌△CBE，

∴∠EBC=∠ACD，

∵∠BFC=180°－∠EBC－∠BCD，

∴∠BFC=180°－∠ACD－∠BCD，

=180°－∠ACB，

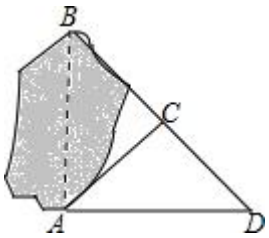
∵∠A=∠ABC=∠ACB，

∴∠ACB=60°，

∴∠BFC=180°－60°=120°，

∴∠BFC 无变化.

2. 如图，为了测量出池塘两端 A、B 之间的距离，先在地面上取一点 C，使∠ACB=90°，然后延长 BC 至 D，使 $CD=BC$，那么只要测量出 AD 的长度就得到 A，B 两点之间的距离，你能说明其中的道理吗？



【解答】见解析

【解析】能，

理由是：∵∠*ACB*＝90°，

∴∠*ACB*＝∠*ACD*＝90°，

在△*ACD* 和△*ACB* 中，

$$\begin{cases} AC = AC \\ \angle ACD = \angle ACB, \\ BC = DC \end{cases}$$

∴△*ACD*≌△*ACB*（*SAS*），

∴*AB*＝*AD*.

3. 在平面直角坐标系中，点 *O* 为坐标原点，*A*（2，2）.

（Ⅰ）若点 *B*（4，2），*C*（3，5），请判断△*ABC* 的形状，并说明理由；

（Ⅱ）已知点 *M*（*m*，0），*N*（0，*n*）（*n*＜0），若∠*MAN*＝90°，且 $mn=-\frac{15}{7}$，求 m^2+n^2 的值.

【解答】（Ⅰ）△*ABC* 的等腰三角形；（2）$\frac{142}{7}$

【解析】（Ⅰ）如图 1 中，

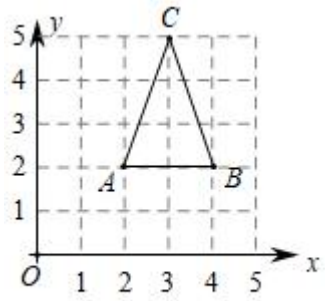


图1

观察图形可知 *CA*＝*CB*，

∴△*ABC* 的等腰三角形.

（Ⅱ）如图 2 中，作 *AD*⊥*y* 轴于 *D*，*AE*⊥*OM* 于 *E*.

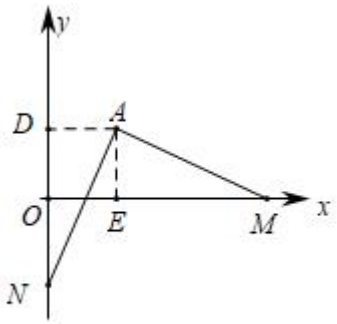


图2

∵A（2，2），

∴$AD=AE$，四边形 $ADOE$ 是正方形，

∵$\angle DAE=\angle MAN=90°$，

∴$\angle DAN=\angle MAE$，

∵$\angle ADN=\angle MEA=90°$，

∴$\triangle ADN\cong\triangle AEM$（$ASA$），

∴$DN=EM$，

∴$2-n=m-2$，

∴$m+n=4$，

∴$m^2+2mn+n^2=16$，

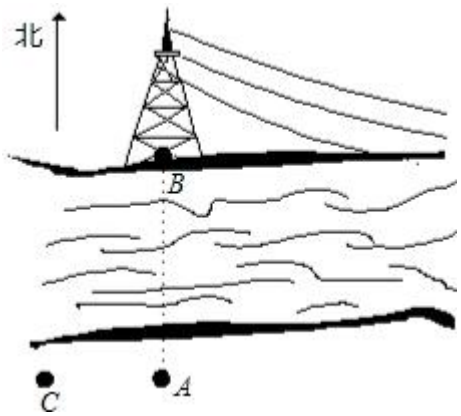
∵$mn=-\frac{15}{7}$，

∴$m^2+n^2=16+\frac{30}{7}=\frac{142}{7}$.

4. 如图：小刚站在河边的 A 点处，在河的对面（小刚的正北方向）的 B 处有一电线塔，他想知道电线塔离他有多远，于是他向正西方向走了 20 步到达一棵树 C 处，接着再向前走了 20 步到达 D 处，然后他左转 90° 直行，当小刚看到电线塔、树与自己现处的位置 E 在一条直线时，他共走了 100 步.

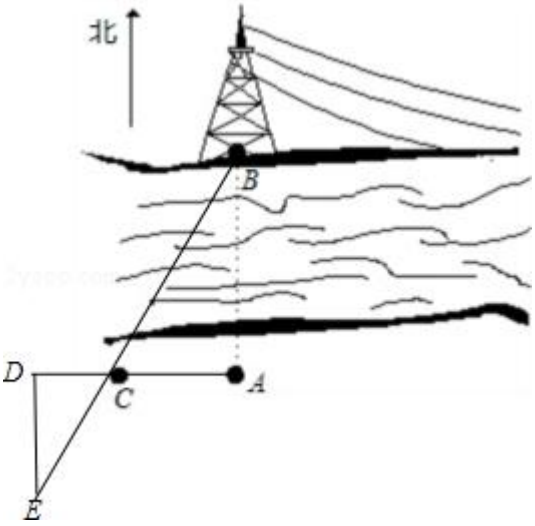
（1）根据题意，画出示意图；

（2）如果小刚一步大约 50 厘米，估计小刚在点 A 处时他与电线塔的距离，并说明理由.



【解答】（1）见解析；（2）见解析

【解析】（1）所画示意图如下：



（2）在△*ABC* 和△*DEC* 中，$\begin{cases}\angle D=\angle A\\ DC=AC\\ \angle DCE=\angle ACB\end{cases}$，

∴△*ABC*≌△*DEC*，

∴*AB*＝*DE*，

又∵小刚共走了 100 步，其中 *AD* 走了 40 步，

∴走完 *DE* 用了 60 步，

步大约 50 厘米，即 *DE*＝60×0.5 米＝30 米.

答：小刚在点 *A* 处时他与电线塔的距离为 30 米.

5. 【问题背景】

在四边形 *ABCD* 中，*AB*＝*AD*，∠*BAD*＝120°，∠*B*＝∠*ADC*＝90°，*E*、*F* 分别是 *BC*、*CD* 上的点，且∠*EAF*＝60°，试探究图 1 中线段 *BE*、*EF*、*FD* 之间的数量关系.

【初步探索】

小亮同学认为：延长 FD 到点 G，使 $DG=BE$，连接 AG，先证明$\triangle ABE\cong\triangle ADG$，再证明$\triangle AEF\cong\triangle AGF$，则可得到 BE、EF、FD 之间的数量关系是 $EF=BE+FD$.

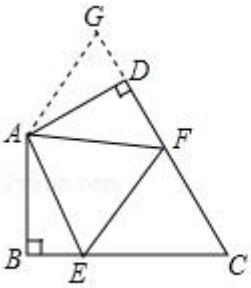


图1

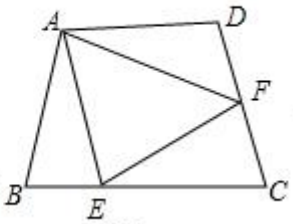


图2

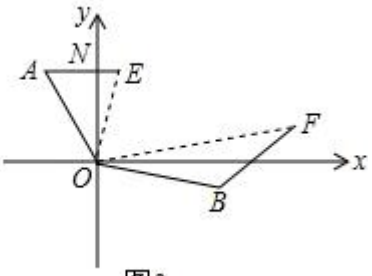


图3

【探索延伸】

在四边形 $ABCD$ 中如图 2，$AB=AD$，$\angle B+\angle D=180°$，E、F 分别是 BC、CD 上的点，$\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD$，上述结论是否仍然成立？说明理由.

【结论运用】

如图 3，在某次军事演习中，舰艇甲在指挥中心（O 处）北偏西 30° 的 A 处，舰艇乙在指挥中心南偏东 70° 的 B 处，并且两舰艇到指挥中心的距离相等，接到行动指令后，舰艇甲向正东方向以 60 海里/小时的速度前进，舰艇乙沿北偏东 50° 的方向以 80 海里/小时的速度前进 1.5 小时后，指挥中心观测到甲、乙两舰艇分别到达 E，F 处，且两舰艇之间的夹角（$\angle EOF$）为 70°，试求此时两舰艇之间的距离.

【解答】见解析

【解析】初步探索：$EF=BE+FD$，

故答案为：$EF=BE+FD$，

探索延伸：结论仍然成立，

证明：如图 2，延长 FD 到 G，使 $DG=BE$，连接 AG，

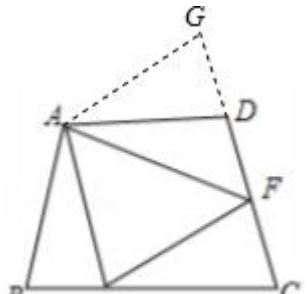


图2

∵ $\angle B+\angle ADC=180°$，$\angle ADG+\angle ADC=180°$

∴ $\angle B=\angle ADG$，

在$\triangle ABE$ 和$\triangle ADG$ 中，

$\begin{cases} BE = DG \\ \angle B = \angle ADG, \\ AB = AD \end{cases}$

∴△*ABE*≌△*ADG*，

∴*AE*＝*AG*，∠*BAE*＝∠*DAG*，

∵∠*EAF*＝$\frac{1}{2}$∠*BAD*，

∴∠*GAF*＝∠*DAG*+∠*DAF*＝∠*BAE*+∠*DAF*＝∠*BAD*﹣∠*EAF*＝∠*EAF*，

∴∠*EAF*＝∠*GAF*，

在△*AEF* 和△*GAF* 中，

$\begin{cases} AE = AG \\ \angle EAF = \angle GAF, \\ AF = AF \end{cases}$

∴△*AEF*≌△*GAF*，

∴*EF*＝*FG*，

∴*FG*＝*DG*+*FD*＝*BE*+*DF*；

结论运用：如图 3，连接 *EF*，延长 *AE*、*BF* 交于点 *C*，

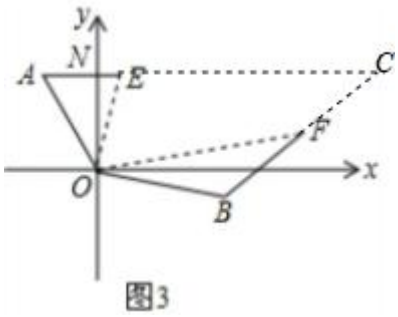


图3

∵∠*AOB*＝30°+90°+（90°﹣70°）＝140°，

∠*EOF*＝70°，

∴∠*EOF*＝$\frac{1}{2}$∠*AOB*，

∵*OA*＝*OB*，

∠*OAC*+∠*OBC*＝（90°﹣30°）+（70°+50°）＝180°，

∴符合探索延伸中的条件

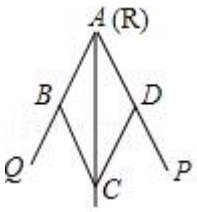
∴结论 *EF*＝*AE*+*BF* 成立，

即 *EF*＝1.5×（60+80）＝210 海里，

答：此时两舰艇之间的距离是 210 海里.

6. 如图：小敏做了一个角平分仪 *ABCD*，其中 *AB*＝*AD*，*BC*＝*DC*，将仪器上的点 *A* 与∠*PRQ* 的顶点 *R* 重

合，调整 AB 与 AD，使他们分别落在角的两边上，过点 A、C 画一条射线 AE，AE 就是 $\angle PRQ$ 的平分线．试利用全等知识，说明角平分仪的画图原理．



【解答】见解析

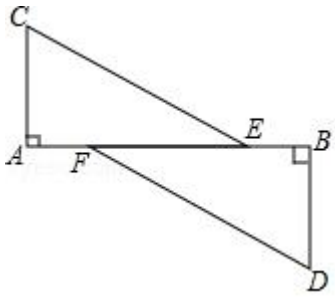
【解析】∵在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$ 中 $\begin{cases} AB = AD \\ CB = DC \\ AC = AC \end{cases}$，

∴$\triangle ABC \cong \triangle ADC$（$SSS$），

∴$\angle BAC = \angle DAC$，

∴AE 平分 $\angle PRQ$．

7．　如图，C、D 分别位于路段 A、B 两点的正北处与正南处，现有两车分别从 E、F 两处出发，以相同的速度行驶，相同时间后分别到达 C、D 两地，休整一段时间后又以原来的速度行驶最终同时到达 A、B 两点，那么 CE 与 DF 平行吗？为什么？



【解答】见解析

【解析】$CE // DF$，

理由：由题意得，$\angle A = \angle B = 90°$，

在 $Rt\triangle AEC$ 与 $Rt\triangle BFD$ 中，$\begin{cases} CE = DF \\ AC = BD \end{cases}$，

∴$Rt\triangle AEC \cong Rt\triangle BFD$，

∴$\angle AEC = \angle BFD$，

∴$CE // DF$．

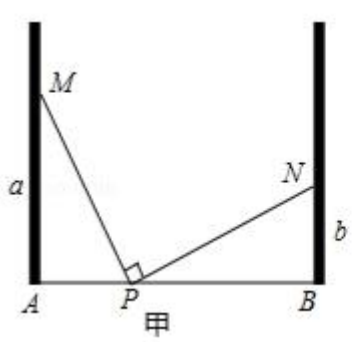
8．　如图是小磊家的两个房间甲与乙，他将一个梯子斜靠在墙上，梯子顶端距离地面的垂直距离记作 MA，如果梯子的底端不动，顶端靠在对面墙上，此时梯子的顶端距离地面的垂直距离记作 NB．

（1）当他在甲房间时，测得 $MA = a$，$NB = b$，求甲房间的宽 AB；

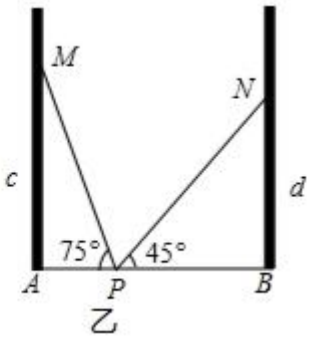
（2）当他在乙房间时，测得 $MA=c$，$NB=d$，且$\angle MPA=75°$，$\angle NPB=45°$

①求$\angle MPN$　　的度数；

②求乙房间的宽 AB.



甲



乙

【解答】（1）$a+b$；（2）①60°；②c

【解析】（1）∵$\angle MPN=180°$，

∴$\angle APM+\angle BPN=90°$，

∵$\angle APM+\angle AMP=90°$，

∴$\angle AMP=\angle BPN$.

在$\triangle AMP$ 与$\triangle BPN$ 中，

$$\begin{cases}\angle AMP=\angle BPN\\ \angle MAP=\angle PBN=90°,\\ MP=PN\end{cases}$$

∴$\triangle AMP\cong\triangle BPN$，

∴$MA=PB=a$，$PA=NB=b$，

∴$AB=PA+PB=a+b$；

（2）①$\angle MPN=180°-\angle APM-\angle BPN=60°$；

②过 N 点作 MA 垂线，垂足点 D，连接 NM.

设 $AB=x$，且 $AB=ND=x$.

∵梯子的倾斜角$\angle BPN$ 为 45°，

∴$\triangle BNP$ 为等腰直角三角形，$\triangle PNM$ 为等边三角形（180 - 45 - 75=60°，梯子长度相同），$\angle MND=15°$.

∵$\angle APM=75°$，

∴$\angle AMP=15°$.

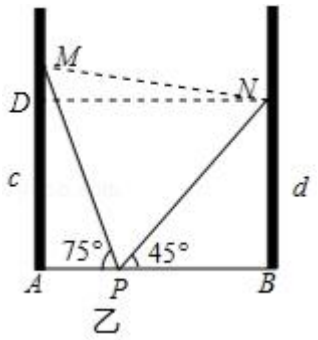
∴$\cos 15°=\frac{x}{MN}=\frac{MA}{MP}$.

∵$\triangle PNM$ 为等边三角形，

∴$NM=PM$.

∴$x=MA=c$.

即乙房间的宽 AB 是 c.



乙

9. （1）如图 1，已知△ABC，以 AB、AC 为边分别向外作正方形 $ABFD$ 和正方形 $ACGE$，连结 BE、CD，猜想 BE 与 CD 有什么数量关系？并说明理由；

（2）请模仿正方形情景下构造全等三角形的思路，利用构造全等三角形完成下题：如图 2，要测量池塘两岸相对的两点 B、E 的距离，已经测得∠ABC=45°，∠CAE=90°，$AB=BC$=100 米，$AC=AE$，求 BE 的长（结果保留根号）.

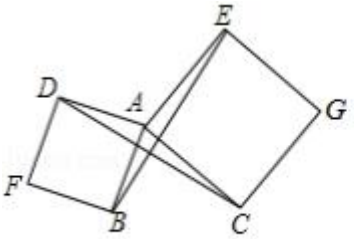


图1

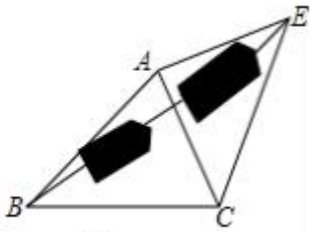


图2

【解答】（1）$CD=BE$；（2）$100\sqrt{3}$米

【解析】（1）$CD=BE$.

理由：如图①∵四边形 $ABFD$ 和四边形 $ACGE$ 都是正方形，

∴$AD=AB$，$AC=AE$，∠DAB=∠CAE=90°，

∴∠DAB+∠BAC=∠CAE+∠BAC，

∴∠DAC=∠BAE.

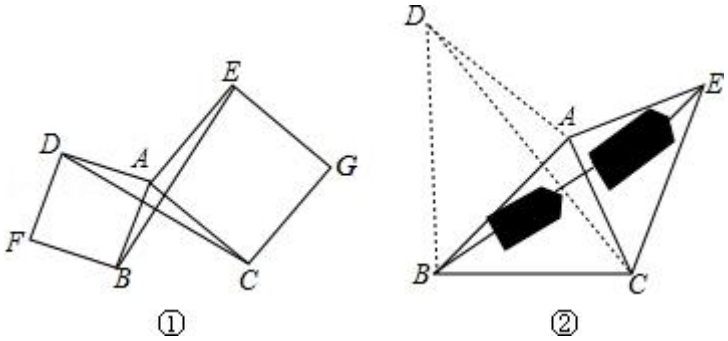
在△ADC 和△ABE 中，

$$\begin{cases} AD = AB \\ \angle DAC = \angle BAE, \\ AC = AE \end{cases}$$

∴△ADC≌△ABE（SAS），

∴$CD=BE$；

（2）如图②，在 AB 的外侧作 $AD\perp AB$，使 $AD=AB$，连结 CD，BD，



$\therefore\angle DAB=90°$，

$\therefore\angle ABD=\angle ADB=45°$．

$\because\angle ABC=45°$，

$\therefore\angle ABD+\angle ABC=45°+45°=90°$，

即$\angle DBC=90°$．

$\therefore\angle CAE=90°$，

$\therefore\angle DAB=\angle CAE$，

$\therefore\angle DAB+\angle BAC=\angle CAE+\angle BAC$，

即$\angle DAC=\angle BAE$．

在$\triangle ADC$ 和$\triangle ABE$ 中

$$\begin{cases}AD=AB\\ \angle DAC=\angle BAE,\\ AC=AE\end{cases}$$

$\therefore\triangle ADC\cong\triangle ABE$（$SAS$），

$\therefore CD=BE$．

$\because AB=100m$，在直角$\triangle ABD$ 中，由勾股定理，得

$BD=100\sqrt{2}$．

$\therefore CD=\sqrt{100^2+(100\sqrt{2})^2}=100\sqrt{3}$，

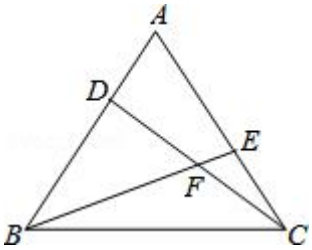
$\therefore BE=CD=100\sqrt{3}$，

答：BE 的长为 $100\sqrt{3}$米．

10．如图，在等边$\triangle ABC$ 的顶点 A、C 处各有一只蜗牛，它们同时出发，分别以相同的速度由 A 向 B 和由 C 向 A 爬行，经过 7 分钟后，它们分别爬行到 D、E 处，设 DC 与 BE 的交点为点 F．

（1）求证：$\triangle ACD\cong\triangle CBE$；

（2）蜗牛在爬行过程中，DC 与 BE 所成的$\angle BFC$ 的大小有无变化？请证明你的结论．



【解答】（1）见解析；（2）见解析

【解析】（1）证明：∵$AB=BC=CA$，两只蜗牛速度相同，且同时出发，

∴$CE=AD$；$\angle A=\angle BCE=60°$，

在△ACD与△CBE中，

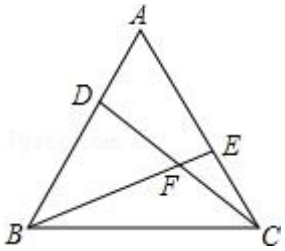
$$\begin{cases} AC=CB \\ \angle A=\angle BCE, \\ CE=AD \end{cases}$$

∴△ACD≌△CBE（SAS）；

（2）DC和BE所成的$\angle BFC$的大小不变.

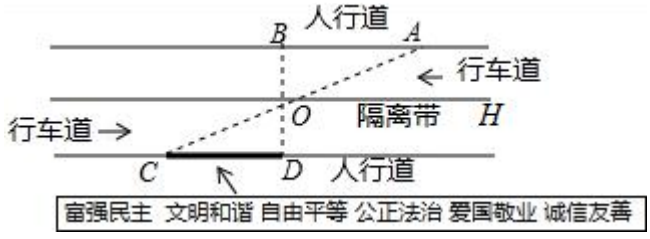
理由如下：∵△ACD≌△CBE，

∴$\angle BFC=180°-\angle FBC-\angle BCD=180°-\angle ACD-\angle BCD=120°$.



11．淇淇同学沿一段笔直的人行道行走，在由A处步行到达B处的过程中，通过隔离带的空隙O，刚好浏览完对面人行道宣传墙上的社会主义核心价值观标语，其具体信息汇集如下：

如图，$AB/\!/OH/\!/CD$，相邻两平行线间的距离相等，AC，BD相交于O，$OD\perp CD$．垂足为D，已知$AB=20$米，请根据上述信息求标语CD的长度.



【解答】20m

【解析】∵$AB/\!/CD$，∴$\angle ABO=\angle CDO$，

∵$OD\perp CD$，∴$\angle CDO=90°$，

∴$\angle ABO=90°$，即$OB\perp AB$，

∵相邻两平行线间的距离相等，

∴$OD=OB$，

在△ABO 与△CDO 中，

$$\begin{cases}\angle ABO=\angle CDO\\ OB=OD\\ \angle AOB=\angle COD\end{cases}$$，

∴△ABO≌△CDO（ASA），

∴$CD=AB=20$（m）.

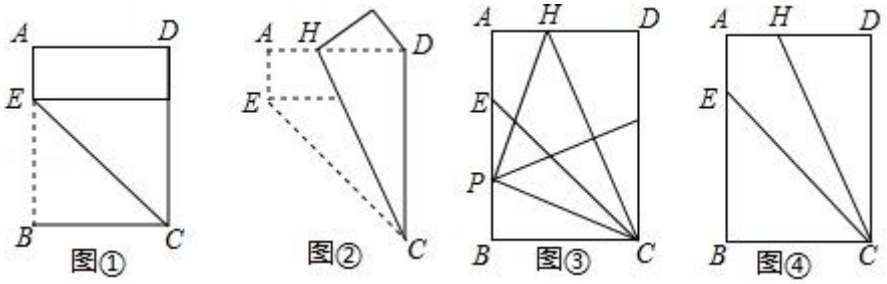
12．对给定的一张矩形纸片 $ABCD$ 进行如下操作：先沿 CE 折叠，使点 B 落在 CD 边上（如图①），再沿 CH 折叠，这时发现点 E 恰好与点 D 重合（如图②）

（1）根据以上操作和发现，求$\frac{CD}{AD}$的值；

（2）将该矩形纸片展开.

①如图③，折叠该矩形纸片，使点 C 与点 H 重合，折痕与 AB 相交于点 P，再将该矩形纸片展开．求证：$\angle HPC=90°$；

②不借助工具，利用图④探索一种新的折叠方法，找出与图③中位置相同的 P 点，要求只有一条折痕，且点 P 在折痕上，请简要说明折叠方法.（不需说明理由）



【解答】（1）$\frac{CD}{AD}=\sqrt{2}$；（2）①见解析；②见解析

【解析】（1）由图①，可得$\angle BCE=\frac{1}{2}\angle BCD=45°$，

又∵$\angle B=90°$，

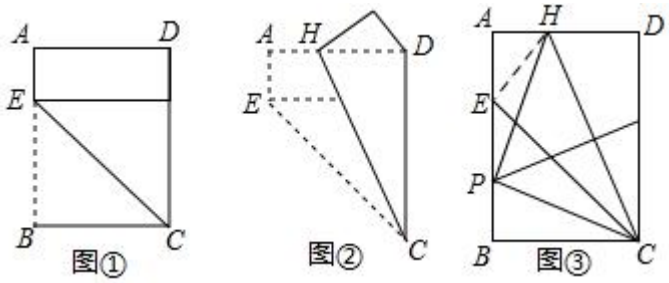
∴△BCE 是等腰直角三角形，

∴$\frac{BC}{EC}=cos45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $CE=\sqrt{2}BC$，

由图②，可得 $CE=CD$，而 $AD=BC$，

∴$CD=\sqrt{2}AD$，

∴$\frac{CD}{AD}=\sqrt{2}$；



（2）①设 $AD=BC=a$，则 $AB=CD=\sqrt{2}a$，$BE=a$，

$\therefore AE=(\sqrt{2}-1)a$，

如图③，连接 EH，则 $\angle CEH=\angle CDH=90°$，

$\because \angle BEC=45°$，$\angle A=90°$，

$\therefore \angle AEH=45°=\angle AHE$，

$\therefore AH=AE=(\sqrt{2}-1)a$，

设 $AP=x$，则 $BP=\sqrt{2}a-x$，由翻折可得，$PH=PC$，即 $PH^2=PC^2$，

$\therefore AH^2+AP^2=BP^2+BC^2$，

即 $[(\sqrt{2}-1)a]^2+x^2=(\sqrt{2}a-x)^2+a^2$，

解得 $x=a$，即 $AP=BC$，

又 $\because PH=CP$，$\angle A=\angle B=90°$，

$\therefore Rt\triangle APH\cong Rt\triangle BCP$（$HL$），

$\therefore \angle APH=\angle BCP$，

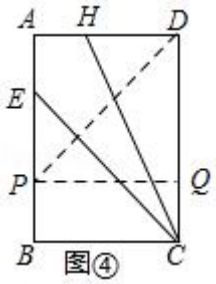
又 $\because Rt\triangle BCP$ 中，$\angle BCP+\angle BPC=90°$，

$\therefore \angle APH+\angle BPC=90°$，

$\therefore \angle CPH=90°$；

②折法：如图，由 $AP=BC=AD$，可得 $\triangle ADP$ 是等腰直角三角形，PD 平分 $\angle ADC$，

故沿着过 D 的直线翻折，使点 A 落在 CD 边上，此时折痕与 AB 的交点即为 P；



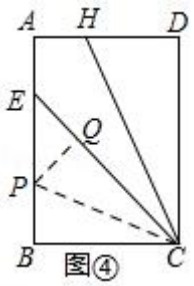
折法：如图，由 $\angle BCE=\angle PCH=45°$，可得 $\angle BCP=\angle ECH$，

由 $\angle DCE=\angle PCH=45°$，可得 $\angle PCE=\angle DCH$，

又∵∠DCH＝∠ECH，

∴∠BCP＝∠PCE，即 CP 平分∠BCE，

故沿着过点 C 的直线折叠，使点 B 落在 CE 上，此时，折痕与 AB 的交点即为 P.



图④