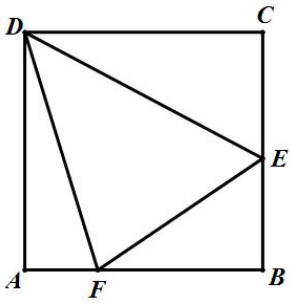
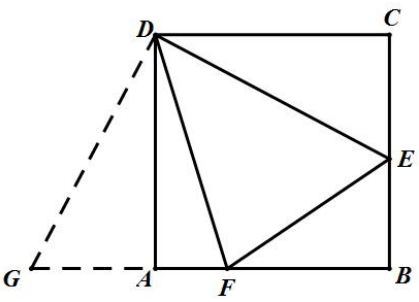
倍半角模型巩固练习（提优）

1. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E、F 分别在 BC、AB 上，且$\angle FDE=45^{\circ}$，连接 DE、DF、EF，试探究 EF、AF、CE 之间的数量关系.



【解答】$EF=AF+CE$，证明见解析

【解析】如图，将$\triangle DCE$ 绕着点 D 顺时针旋转 90°得到$\triangle DGA$.



$\because \angle EDC+\angle ADF+\angle FDE=90^{\circ}$，$\angle FDE=45^{\circ}$，$\therefore \angle EDC+\angle ADF=45^{\circ}$，

又$\because$旋转，$\therefore DE=DG$，$\angle GDA=\angle EDC$，$\therefore \angle GDA+\angle ADF=\angle GDF=\angle FDE=45^{\circ}$，

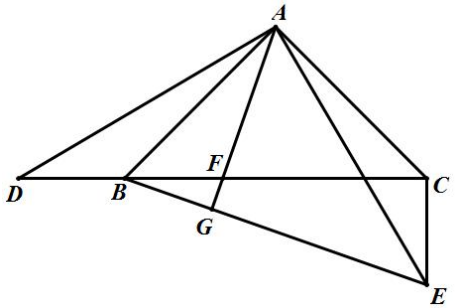
在$\triangle DGF$ 与$\triangle DEF$ 中，$DF=DF$，$\angle GDF=\angle EDF$，$DG=DE$，$\therefore \triangle DGF\cong\triangle DEF$，$\therefore EF=GF=GA+AF$，

$\because$旋转，$\therefore GA=CE$，$\therefore EF=AF+CE$.

2. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle BAC=90^{\circ}$，点 D 在 CB 的延长线上，连接 AD，$EA\perp AD$，$\angle ACE=\angle ABD$.

（1）求证：$AD=AE$；

（2）点 F 为 CD 的中点，AF 的延长线交 BE 于点 G，求$\angle AGE$ 的度数.



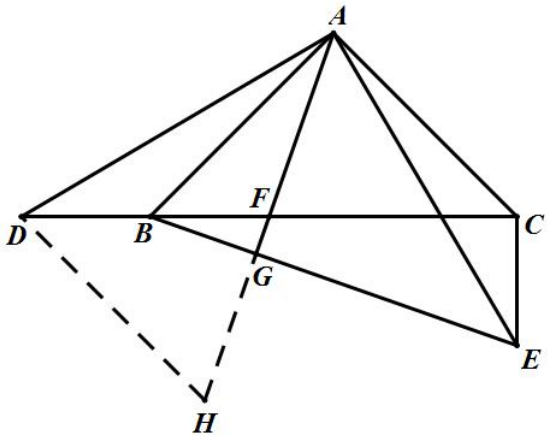
【解答】（1）见解析；（2）$\angle AGE=90^{\circ}$

【解析】（1）证明：∵$EA\perp AD$，∴$\angle DAE=\angle 90^{\circ}$，∴$\angle DAB+\angle BAE=90^{\circ}$，

∵$\angle BAC=90^{\circ}$，∴$\angle CAE+\angle BAE=90^{\circ}$，∴$\angle DAB=\angle CAE$，

∵$\angle ACE=\angle ABD$，$AB=AC$，∴$\triangle ADB\cong\triangle ACE$，∴$AD=AE$；

（2）如图，延长 AG 至点 H，使得 $FH=FA$.



∵点 F 为 CD 的中点，∴$DF=CF$，

∵$\angle DFH=\angle CFA$，∴$\triangle DFH\cong\triangle CFA$，∴$DH=AC$，$\angle H=\angle CAF$，∴$DH/\!/AC$，∴$\angle ADH+\angle DAC=180^{\circ}$，

∵$\angle BAE+\angle DAC=\angle BAE+\angle DAE+\angle EAC=90^{\circ}+90^{\circ}=180^{\circ}$，∴$\angle ADH=\angle BAE$，

∵$AB=AC$，∴$DH=AB$，

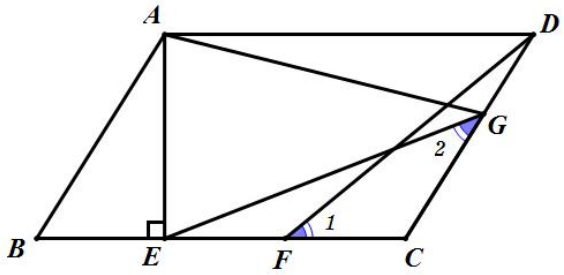
∵$AD=AE$，∴$\triangle ADH\cong\triangle EAB$，∴$\angle DAH=\angle AEB$，

∵$\angle DAH+\angle GAE=90^{\circ}$，∴$\angle AEB+\angle GAE=90^{\circ}$，∴$\angle AGE=180^{\circ}-(\angle AEB+\angle GAE)=180^{\circ}-90^{\circ}=90^{\circ}$.

3. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$AE\perp BC$ 于点 E，$CE=CD$，点 F 为 CE 的中点，点 G 为 CD 上的一点，连接 DF、EG、AG，$\angle 1=\angle 2$.

（1）若 $CF=2$，$AE=3$，求 BE 的长；

（2）求证：$\angle CEG=\frac{1}{2}\angle AGE$.



【解答】（1）$BE=\sqrt{7}$；（2）见解析

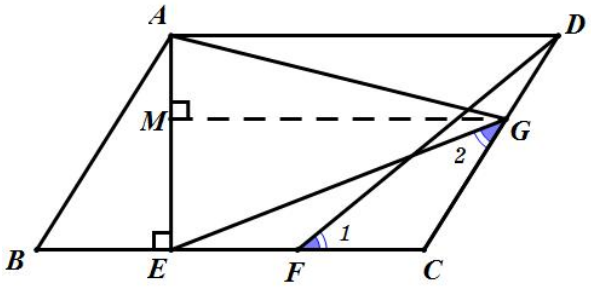
【解析】（1）∵$CE=CD$，点 F 是 CE 的中点，$CF=2$，∴$DC=CE=2CF=4$，

∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∴$AB=CD=4$，

∵$AE\perp BC$，∴$\angle AEB=90^{\circ}$，

在 $Rt\triangle ABE$ 中，由勾股定理可得 $BE=\sqrt{7}$；

（2）如图，过点 G 作 $GM\perp AE$ 于点 M.



∵$AE\perp BC$，$GM\perp AE$，∴$GM\parallel BC\parallel AD$，在$\triangle DCF$ 与$\triangle ECG$ 中，

∵$\begin{cases}\angle 1=\angle 2\\ \angle C=\angle C\\ CD=CE\end{cases}$，∴$\triangle DCF\cong\triangle ECG$，∴$CG=CF$，$CE=CD$，

∵$CE=2CF$，∴$CD=2CG$，即点 G 是 CD 的中点，

∵$AD\parallel GM\parallel BC$，∴$M$ 为 AE 的中点，∴$AM=EM$，

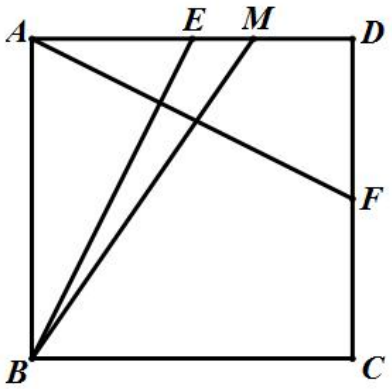
∵$GM\perp AE$，∴$AG=EG$，∴$\angle AGM=\angle EGM$，∴$\angle AGE=2\angle MGE$，

∵$GM\parallel BC$，∴$\angle EGM=\angle CEG$，∴$\angle CEG=\frac{1}{2}\angle AGE$.

4. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，E 为 AD 边上的中点，过点 A 作 $AF\perp BE$ 交 CD 边于点 F，M 是 AD 边上一点，且 $BM=DM+CD$.

（1）求证：点 F 是 CD 边上的中点；

（2）求证：$\angle MBC=2\angle ABE$.



【解答】（1）见解析；（2）见解析

【解析】（1）∵四边形 $ABCD$ 是正方形，∴$AD=DC=AB=BC$，$\angle C=\angle D=\angle BAD=90^{\circ}$，$AB\parallel CD$，

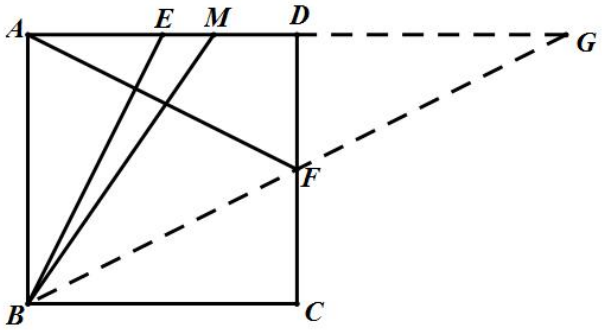
∵$AF\perp BE$，∴$\angle AOE=90^{\circ}$，∴$\angle EAF+\angle AEB=90^{\circ}$，$\angle EAF+\angle BAF=90^{\circ}$，∴$\angle AEB=\angle BAF$，

∵$AB\parallel CD$，∴$\angle BAF=\angle AFD$，∴$\angle AEB=\angle AFD$，

∵$\angle BAD=\angle D$，$AB=AD$，∴$\triangle BAE\cong\triangle ADF$，∴$AE=DF$，

∵点 E 是边 AD 的中点，∴点 F 是 CD 边上的中点；

（2）延长 AD 至点 G，使得 $MG=MB$，连接 FG、FB，如图所示：



∵$BM=DM+CD$，∴$DG=DC=BC$，

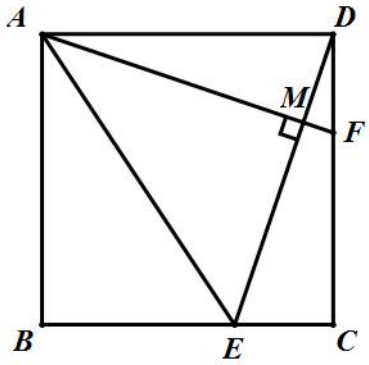
∵$\angle GDF=\angle C=90^{\circ}$，$DF=CF$，∴$\triangle FDG\cong\triangle FCB$，∴$\angle DFG=\angle CFB$，∴点 B、F、G 共线，

∵点 E 为 AD 边上的中点，点 F 是 CD 边上的中点，$AD=CD$，∴$AE=CF$，

∵$AB=BC$，$\angle C=\angle BAD=90^{\circ}$，$AE=CF$，∴$\triangle ABE\cong\triangle CBF$，∴$\angle ABE=\angle CBF$，

∵$AG\parallel BC$，∴$\angle AGB=\angle CBF=\angle ABE$，∴$\angle MBC=\angle AMB=2\angle AGB=2\angle GBC=2\angle ABE$，∴$\angle MBC=2\angle ABE$.

5. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，F 是 DC 上一点，AE 平分 $\angle BAF$ 交 BC 于点 E，且 $DE\perp AF$，垂足为点 M，$BE=3$，$AE=2\sqrt{6}$，求 MF 的长.



【解答】$MF=\dfrac{\sqrt{15}}{15}$

【解析】【方法一】∵AE 平分 $\angle BAF$ 交 BC 于点 E，且 $DE\perp AF$，$\angle B=90^{\circ}$，∴$AB=AM$，$BE=EM=3$，

又∵$AE=2\sqrt{6}$，∴$AM=\sqrt{AE^2-EM^2}=\sqrt{24-9}=\sqrt{15}$，

设$MD=a, MF=x$，在$\triangle ADM$与$\triangle DFM$中，

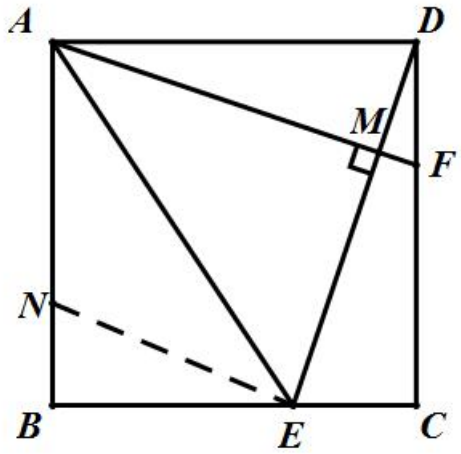
$$\because \begin{cases} \angle AMD=\angle DMF \\ \angle ADM=\angle DFM \end{cases}, \therefore \triangle ADM \backsim \triangle DFM, \frac{DM}{AM}=\frac{FM}{DM},$$

$$\therefore DM^2=AM\cdot MF, \therefore a^2=\sqrt{15}x,$$

又$\because \triangle DMF \backsim \triangle DCE$，$\therefore \frac{MD}{DC}=\frac{MF}{EC}$，即$\frac{MD}{MF}=\frac{DC}{EC}$，

$$\therefore \frac{a}{x}=\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{(3+a)^2-15}}, \text{解得} \begin{cases} a=1 \\ x=\frac{\sqrt{15}}{15} \end{cases};$$

【方法二】如图，在AB上取点N并使得$\angle AEN=\angle EAN$，连接EN，



由题意可得$AN=NE$，且$\angle BNE=2\angle BAE$，

$\because BE=3$，$AE=2\sqrt{6}$，$\therefore AB=\sqrt{15}$，设$BN=x$，则$AN=NE=\sqrt{15}-x$，

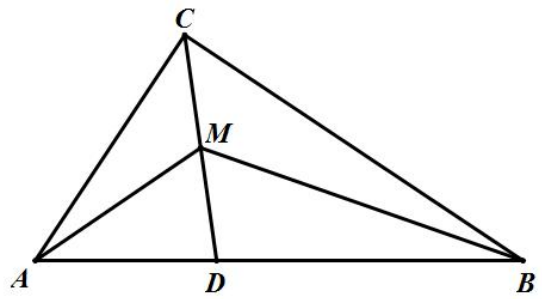
在$Rt\triangle EBN$中，由勾股定理得$x^2+3^2=\left(\sqrt{15}-x\right)^2$，解得$x=\frac{3\sqrt{15}}{15}$，

$\therefore \tan\angle BNE=\frac{3}{x}=\sqrt{15}$，$\therefore \tan\angle ADM=\tan\angle DFM=\tan\angle BNE=\sqrt{15}$，

由$\tan\angle ADM=\sqrt{15}$和$AM=\sqrt{15}$得$DM=1$，

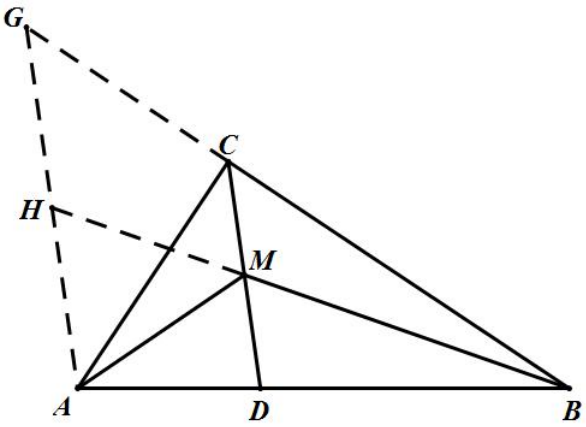
由$\tan\angle DFM=\sqrt{15}$和$DM=1$得$MF=\frac{\sqrt{15}}{15}$.

6. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，D是AB边上的一点，M是CD的中点，若$\angle AMD=\angle BMD$. 求证：$\angle CDA=2\angle ACD$.



【解答】见解析

【解析】证明：过点 A 作 $AG\parallel DC$ 交 BM 延长线于点 H 交 BC 的延长线于点 G，连接 HC，如图所示：



由题意可得$\angle BMD=\angle AHB$，$\angle AMD=\angle HAM$，$\angle HAC=\angle ACD$，即 $\frac{CM}{HG}=\frac{BM}{BH}=\frac{DM}{AH}$，

$\because CM=DM$，$\therefore HG=AH$，即点 H 是 AG 的中点，

$\because AC\perp BC$，$\therefore CH=\frac{AG}{2}=HG=AH$，$\therefore \angle HCA=\angle HAC=\angle ACD$，

$\therefore \angle HCM=\angle HCA+\angle ACD=\angle ACD+\angle ACD=2\angle ACD$，

$\because \angle HAM=\angle AMD$，$\angle AMD=\angle BMD$，$\angle BMD=\angle AHB$，$\angle BMD=\angle HMC$，$\therefore HM=AM$，

$\because MD=MC$，$\angle AMD=\angle HMC$，$AM=HM$，$\therefore \triangle AMD\cong\triangle HMC$，$\therefore \angle ADM=\angle HCM=2\angle ACD$.

7. 如图 1：在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$\angle BAD=120°$，$\angle B=ADC=90°$，E、F 分别是 BC，CD 上的点，且$\angle EAF=60°$，探究图中线段 BE，EF，FD 之间的数量关系.

小王同学探究此问题的方法是：延长 FD 到点 G，使 $DG=BE$，连接 AG，先证明$\triangle ABE\cong\triangle ADG$，再证明$\triangle AEF\cong\triangle AGF$，即可得出 BE，EF，FD 之间的数量关系，他的结论应是_____.

象上面这样有公共顶点，锐角等于较大角的一半，且组成这个较大角的两边相等的几何模型称为半角模型.

拓展

如图 2，若在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$\angle B+\angle D=180°$，E、F 分别是 BC，CD 上的点，且$\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD$，则 BE，EF，FD 之间的数量关系是_____.

请证明你的结论.

实际应用

如图 3，在某次军事演习中，舰艇甲在指挥中心（O 处）北偏西 30° 的 A 处，舰艇乙在指挥中心南偏东 70° 的 B 处，且两舰艇到指挥中心的距离相等接到行动指令后，舰艇甲向正东方向以 60 海里/小时的速度前进，舰艇乙沿北偏东 50° 的方向以 80 海里小时的速度前进，1.2 小时后，指挥中心观测到甲、乙两舰艇分别到达 E，F 处，且两舰艇之间的夹角为 70°，试求此时两舰艇之间的距离是_____海里（直接写出答案）.

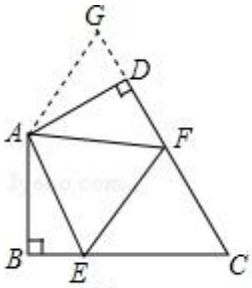


图1

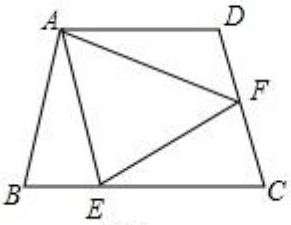


图2

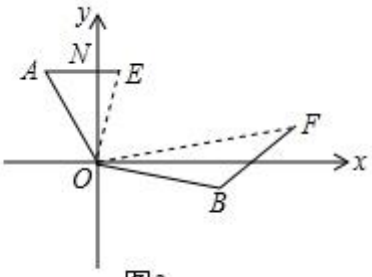


图3

【解答】见解析

【解析】如图 1，$EF=BE+DF$，

理由如下：在△ABE 和△ADG 中，

$$\begin{cases} AB = AD \\ \angle B = \angle ADG, \\ BE = DG \end{cases}$$

∴△ABE≌△ADG（SAS），

∴$AE=AG$，$\angle BAE=\angle DAG$，

∵$\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD$，

∴$\angle GAF=\angle DAG+\angle DAF=\angle BAE+\angle DAF=\angle BAD-\angle EAF=\angle EAF$，

∴$\angle EAF=\angle GAF$，

在△AEF 和△GAF 中，

$$\begin{cases} AE = AG \\ \angle EAF = \angle GAF, \\ AF = AF \end{cases}$$

∴△AEF≌△AGF（SAS），

∴$EF=FG$，

∵$FG=DG+DF=BE+DF$，

∴$EF=BE+DF$；

故答案为 $EF=BE+DF$；

如图 2，$EF=BE+DF$，

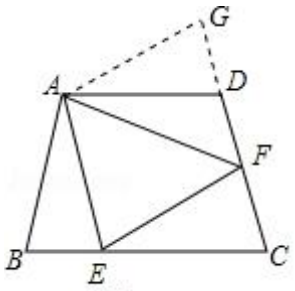


图2

理由：延长 FD 到点 G．使 $DG=BE$．连结 AG，

在△ABE 和△ADG 中，

$$\begin{cases} BE = DG \\ \angle B = \angle ADG, \\ AB = AD \end{cases}$$

∴△ABE≌△ADG（SAS），

∴$AE=AG$，∠BAE=∠DAG，

∵∠EAF=$\frac{1}{2}$∠BAD，

∴∠GAF=∠DAG+∠DAF=∠BAE+∠DAF=∠BAD﹣∠EAF=∠EAF，

∴∠EAF=∠GAF，

在△AEF 和△GAF 中，

$$\begin{cases} AE = AG \\ \angle EAF = \angle GAF, \\ AF = AF \end{cases}$$

∴△AEF≌△AGF（SAS），

∴$EF=FG$，

∵$FG=DG+DF=BE+DF$，

∴$EF=BE+DF$；

如图 3，连接 EF，延长 AE、BF 相交于点 C，

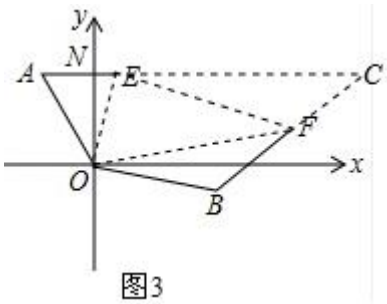


图3

∵∠AOB=30°+90°+（90°﹣70°）=140°，∠EOF=70°，

∴$\angle EOF=\frac{1}{2}\angle AOB$，

∵$OA=OB$，$\angle OAC+\angle OBC$=（90°﹣30°）+（70°+50°）=180°，

∴符合探索延伸中的条件，

∴结论 $EF=AE+BF$ 成立，

即 EF=1.2×（60+80）=168（海里）.

故答案为：168.