倍半角模型巩固练习（基础）

1. 已知$\tan\alpha=\frac{1}{2}$，求$\tan\frac{\alpha}{2}$及$\tan 2\alpha$的值（利用倍半角模型解题）.

【解答】$\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{5}-2$，$\tan 2\alpha=\frac{4}{3}$.

【解析】由图 1 可得$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{BC}{BD}=\frac{1}{2+\sqrt{5}}=\sqrt{5}-2$，

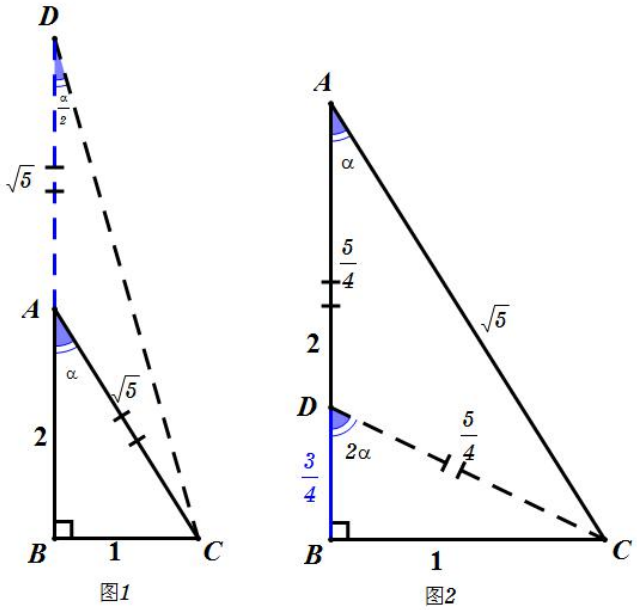
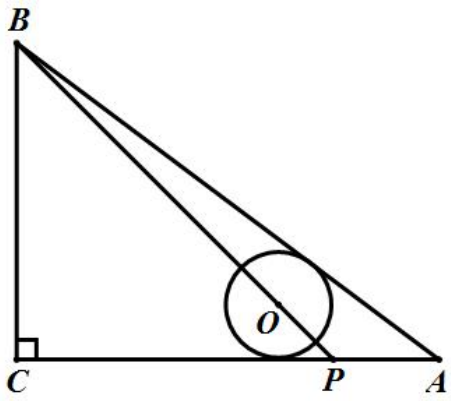


图1　　图2

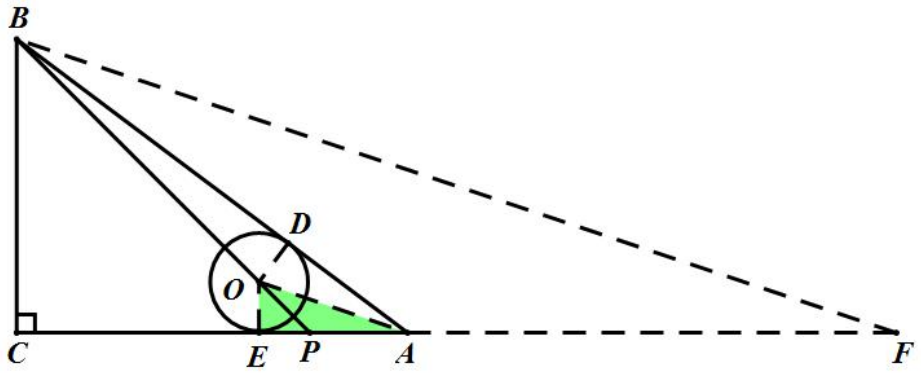
由图 2 可得$\tan 2\alpha=\frac{BC}{BD}=\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}$.

2. 在△*ABC* 中，∠*C*=90°，*AC*=8，*AB*=10，点 *P* 在 *AC* 上，*AP*=2，若⊙*O* 的圆心在线段 *BP* 上，且⊙*O* 与 *AB*、*AC* 都相切，试求⊙*O* 的半径.



【解答】⊙*O* 的半径为 1

【解析】过点 *O* 作 *OD*⊥*AB* 于点 *D*，*OE*⊥*AC* 于点 *E*，延长 *CA* 至点 *F*，使得 *AF*=*AB*=10，连接 *OA*、*BF*，如图所示：

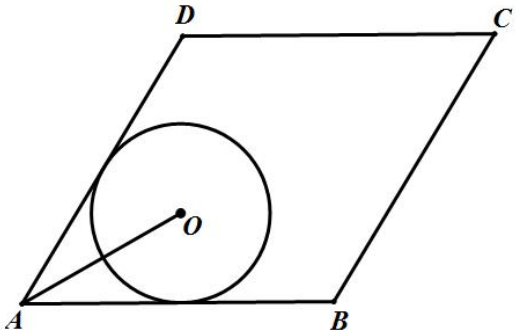


由题意可得 $OD=OE$，AO 平分 $\angle EAO$，$\angle F=\frac{1}{2}\angle BAC$，$\therefore \tan\angle EAO=\tan\angle F=\frac{1}{3}$，

设 $\odot O$ 的半径为 r，由 $BC=PC=6$，$\therefore \triangle PBC$ 为等腰直角三角形，$\therefore EP=OE=r$，$EA=r+2$，

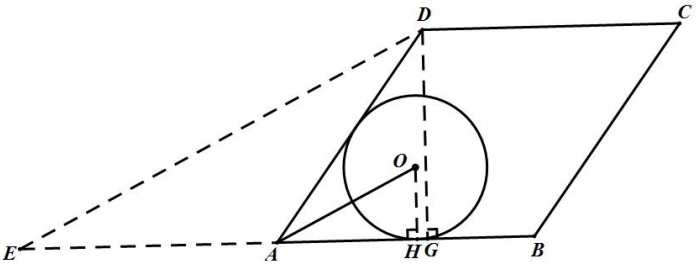
$\therefore \tan\angle EAO=\frac{OE}{EA}=\frac{r}{r+2}=\frac{1}{3}$，解得 $r=1$，即 $\odot O$ 的半径为 1.

3. 如图，菱形 $ABCD$ 的边长 $AB=20$，面积为 320，$\angle BAD<90°$，$\odot O$ 与边 AB、AD 都相切，$AO=10$，求 $\odot O$ 的半径.



【解答】$2\sqrt{5}$

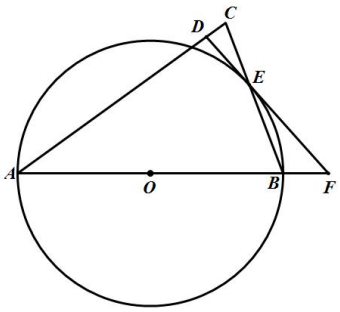
【解析】如图，作 $DG\perp AB$ 于点 G，延长 CA 至点 E，使得 $AE=AD=20$.



由题意可得 $DG=16$，$AG=12$，$EG=AG+AE=32$，$\angle E=\angle EDA=\frac{1}{2}\angle BAD=\angle OAH$，

在 $Rt\triangle EDG$ 中，有 $DG:EG:ED=1:2:\sqrt{5}$，则 $OH=2\sqrt{5}$.

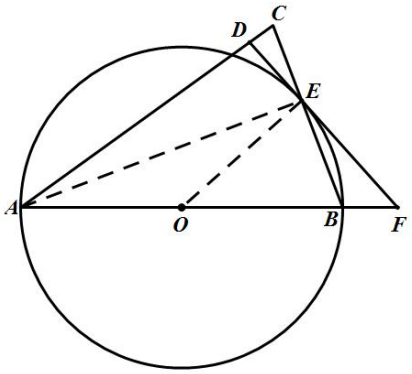
4. 如图，以 $\triangle ABC$ 的边 AB 为直径的 $\odot O$ 交边 BC 于点 E，过点 E 作 $\odot O$ 的切线交 AC 于点 D，且 $ED\perp AC$.若线段 AB、DE 的延长线交于点 F，$\angle C=75°$，$CD=2-\sqrt{3}$，求 $\odot O$ 的半径及 BF 的长.



【解答】圆的半径为 2；$BF=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}-2$

【解析】先由特殊角 30°求出 $\tan 15^\circ=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$（具体做法见知识精讲），

如图，连接 OE、AE，则 $AE\perp BC$，由 $AB=AC$ 得 $\angle EAD=\dfrac{1}{2}\angle BAC=15^\circ$，



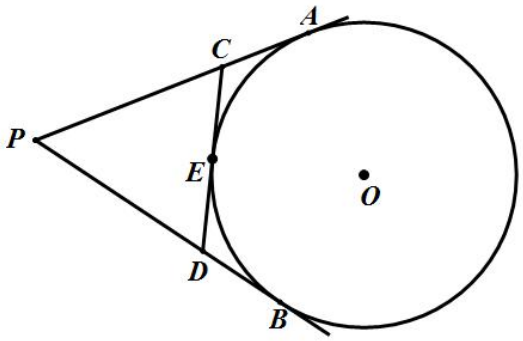
在 $Rt\triangle CDE$ 中，由 $\tan\angle CED=\dfrac{CD}{DE}$ 得 $2-\sqrt{3}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{DE}$，解得 $DE=1$；

在 $Rt\triangle ADE$ 中，由 $\tan\angle EAD=\dfrac{DE}{AD}$ 得 $2-\sqrt{3}=\dfrac{1}{AD}$，解得 $AD=2+\sqrt{3}$，

$\therefore AB=AC=AD+CD=4$，$\therefore$该圆的半径为 2；

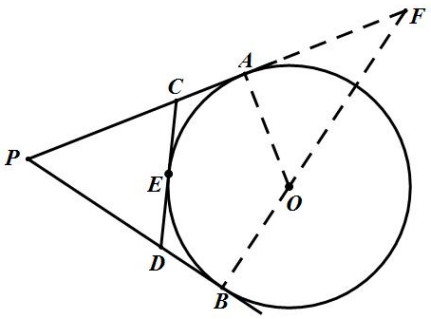
在 $Rt\triangle OEF$ 中，$\sin\angle F=\dfrac{OE}{OF}$，即 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{2}{OF}$，则 $OF=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，$\therefore BF=OF-OB=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}-2$.

5. 如图，PA、PB 切 $\odot O$ 于 A、B 两点，CD 切 $\odot O$ 于点 E，交 PA、PB 于 C、D，若 $\odot O$ 的半径为 r，$\triangle PCD$ 的周长等于 $3r$，求 $\tan\angle APB$ 的值.



【解答】$\tan\angle APB=\dfrac{12}{5}$

【解析】【解法一】如图，连接 OA、OB，延长 PA、BO 交于点 F.



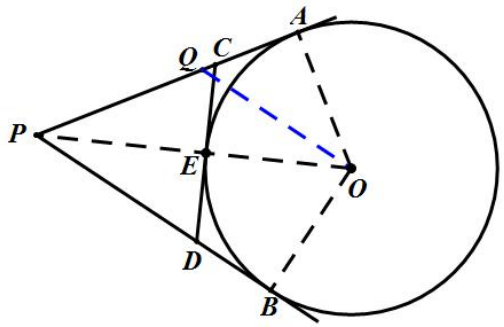
由题意可得 $Rt\triangle FAO\backsim Rt\triangle FBR$，则 $\dfrac{FA}{FB}=\dfrac{FO}{FP}=\dfrac{AO}{BP}=\dfrac{2}{3}$，

设 $FA=2x$，则 $FB=3x,FO=3x-r$，由题意可得 $PA=PB=1.5r,FP=2x+1.5r$，

由 $\dfrac{FO}{FP}=\dfrac{2}{3}$ 可得 $\dfrac{3x-r}{2x+1.5r}=\dfrac{2}{3}$，解得 $x=\dfrac{6}{5}r$，

$\therefore\tan\angle APB=\tan\angle FOA=\dfrac{FA}{AO}=\dfrac{2x}{r}=\dfrac{12}{5}$.

【解法二】如图，连接 OA、OB、OP，在边 AP 上取点 Q，使 $OQ=PQ$.

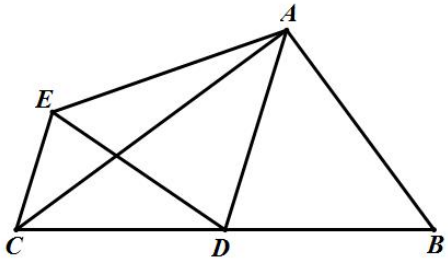


由题意可得 $\angle APB=2\angle APO$，在 $\triangle APO$ 中，$\tan\angle APO=\dfrac{AO}{AP}=\dfrac{2}{3}$，

设 $AQ=x$，由勾股定理可得 $x^2+2^2=(3-x)^2$，解得 $x=\dfrac{5}{6}$，

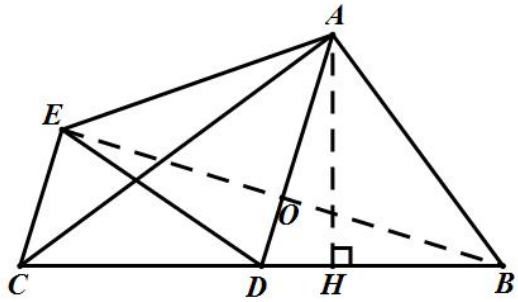
在 $Rt\triangle AOQ$ 中，$\tan\angle AQO=\tan2\angle P=\dfrac{AO}{AQ}=\dfrac{2}{x}=\dfrac{12}{5}$，$\therefore\tan\angle APB=\dfrac{12}{5}$.

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90^\circ$，$AB=3$，$AC=4$，点 D 是 BC 的中点，将 $\triangle ABD$ 沿 AD 翻折得到 $\triangle AED$，连接 CE，求线段 CE 的长.



【解答】$EC=\frac{7}{5}$

【解析】如图，连接 BE 交 AD 于点 O，作 $AH\perp BC$ 于点 H.



在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\because AC=4$，$AB=3$，$\therefore BC=5$ ，

$\because CD=DB$，$\therefore AD=DC=DB=\frac{5}{2}$，

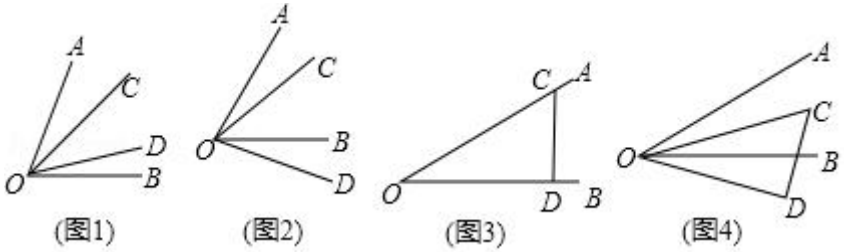
$\because \frac{1}{2}\cdot BC\cdot AH=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC,\ \therefore AH=\frac{12}{5}$，

$\because AE=AB$，$DE=DB=DC$，$\therefore AD$ 垂直平分线段 BE，$\triangle BCE$ 是直角三角形，

$\because \frac{1}{2}\cdot AD\cdot BO=\frac{1}{2}\cdot BD\cdot AH,\ \therefore OB=\frac{12}{5}$，$\therefore BE=2OB=\frac{24}{5}$，

在 $Rt\triangle BCE$ 中，$EC=\sqrt{BC^2-BE^2}=\sqrt{5^2-\left(\frac{24}{5}\right)^2}=\frac{7}{5}$.

7. 定义：从一个角的顶点出发，在角的内部引两条射线，如果这两条射线所成的角等于这个角的一半，那么这两条射线所成的角叫做这个角的内半角．如图 1，若 $\angle COD=\frac{1}{2}\angle AOB$，则 $\angle COD$ 是 $\angle AOB$ 的内半角．



（1）如图 1，已知 $\angle AOB=70°$，$\angle AOC=25°$，$\angle COD$ 是 $\angle AOB$ 的内半角，则 $\angle BOD=$_____；

（2）如图 2，已知 $\angle AOB=60°$，将 $\angle AOB$ 绕点 O 按顺时针方向旋转一个角度 α（$0<\alpha<60°$）至 $\angle COD$，当旋转的角度 α 为何值时，$\angle COB$ 是 $\angle AOD$ 的内半角．

（3）已知 $\angle AOB=30°$，把一块含有 30° 角的三角板如图 3 叠放，将三角板绕顶点 O 以 3 度/秒的速度按

顺时针方向旋转（如图 4），问：在旋转一周的过程中，射线 OA，OB，OC，OD 能否构成内半角？若能，请求出旋转的时间；若不能，请说明理由．

【解答】见解析

【解析】（1）∵$\angle COD$ 是$\angle AOB$ 的内半角，$\angle AOB=70°$，

∴$\angle COD=\frac{1}{2}\angle AOB=35°$，

∵$\angle AOC=25°$，

∴$\angle BOD=70°-35°-25°=10°$，

故答案为：10°，

（2）∵$\angle AOC=\angle BOD=\alpha$，

∴$\angle AOD=60°+\alpha$，

∵$\angle COB$ 是$\angle AOD$ 的内半角，

∴$\angle BOC=\frac{1}{2}(60°+\alpha)=60°-\alpha$，

∴$\alpha=20°$，

∴旋转的角度 α 为 20° 时，$\angle COB$ 是$\angle AOD$ 的内半角；

（3）在旋转一周的过程中，射线 OA，OB，OC，OD 能否构成内半角；

理由：设按顺时针方向旋转一个角度 α，旋转的时间为 t，

如图 1，∵$\angle BOC$ 是$\angle AOD$ 的内半角，$\angle AOC=\angle BOD=\alpha$，

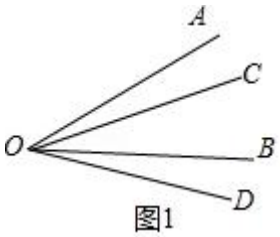


图1

∴$\angle AOD=30°+\alpha$，

∴$\frac{1}{2}(30°+\alpha)=30°-\alpha$，

解得：$\alpha=10°$，

∴$t=\frac{10}{3}s$；

如图 2，∵$\angle BOC$ 是$\angle AOD$ 的内半角，$\angle AOC=\angle BOD=\alpha$，

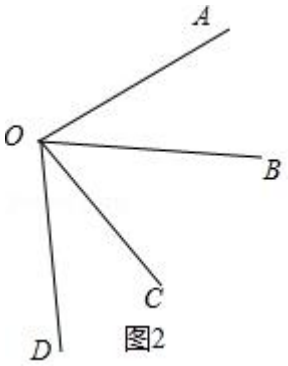


图2

∴∠AOD=30°+α，

∴$\frac{1}{2}$（30°+α）=α-30°，

∴α=90°，

∴$t=\frac{90}{3}=30s$；

如图3，∵∠AOD是∠BOC的内半角，∠AOC=∠BOD=360-α，

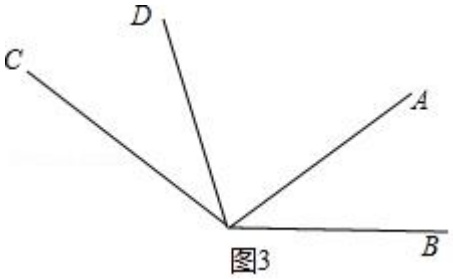


图3

∴∠BOC=360°+30°-α，

∴$\frac{1}{2}$（360°+30°-α）=360°-α-30°，

∴α=270°，

∴t=90s，

如图4，∵∠AOD是∠BOC的内半角，∠AOC=∠BOD=360-α，

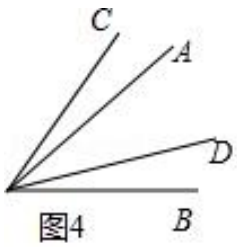


图4

∴∠BOC=360°+30°-α，

∴$\frac{1}{2}$（360°+30°-α）=30°+30°-（360°+30°-α），

解得：α=350°，

∴$t=\frac{350}{3}s$，

综上所述，当旋转的时间为$\frac{10}{3}s$或30s或90s或$\frac{350}{3}s$时，射线OA，OB，OC，OD能构成内半角．