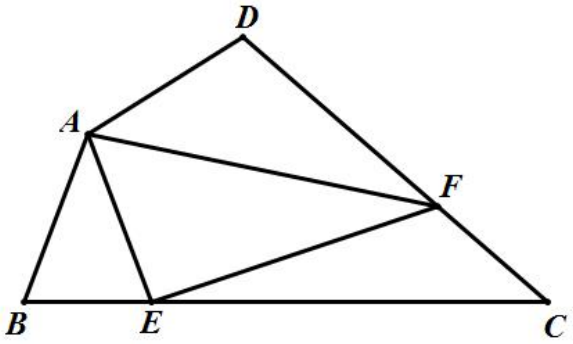
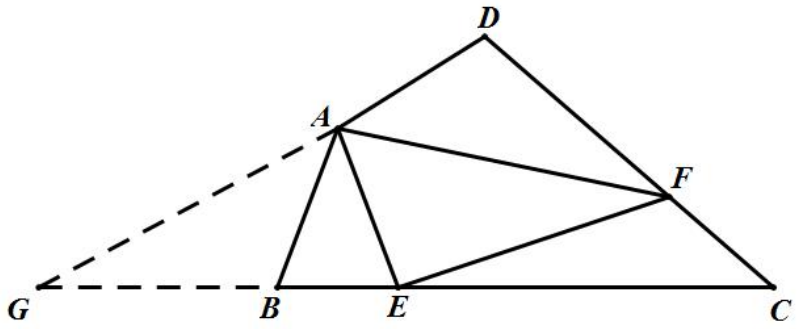
半角模型巩固练习（提优）

1. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle B+\angle D=180°$，$AB=AD$，E、F 分别是线段 BC、CD 上的点，且 $BE+FD=EF$，求证：$\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD$.



【解答】见解析

【解析】证明：将△ADF 绕点 A 顺时针旋转 $\angle DAB$ 的度数得到△ABG，AD 旋转到 AB，AF 旋转到 AG，如图：



∵旋转，∴$AG=AF$，$BG=DF$，$\angle ABG=\angle D$，$\angle BAG=\angle DAF$，

∵$\angle B+\angle D=180°$，∴$\angle B+\angle ABG=180°$，∴点 G、B、C 三点共线，

∵$BE+FD=EF$，∴$BE+BG=GE=EF$，在△AEG 与△AEF 中，

$$\begin{cases} AG=AF \\ AE=AE \\ EG=EF \end{cases},\therefore \triangle AEG\cong\triangle AEF,\ \therefore\angle EAG=\angle EAF,$$

又∵$\angle BAG=\angle DAF$，∴$\angle EAB+\angle DAF=\angle EAF$，∴$\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD$.

2. 已知，在正方形 $ABCD$ 中，$\angle MAN=45°$，$\angle MAN$ 绕点 A 顺时针旋转，它的两边分别交 CB、DC（或它们的延长线）于点 M、N，当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到 $BM=DN$ 时（如图 1），易证 $BM+DN=MN$.

（1）当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到 $BM\neq DN$ 时 （如图 2），线段 BM、DN、和 MN 之间有怎样的数量关系？猜想一下，并加以证明；

（2）当∠*MAN* 绕点 *A* 旋转到如图 3 的位置时，线段 *BM*、*DN* 和 *MN* 之间又有怎样的数量关系？请直接写出你的猜想.

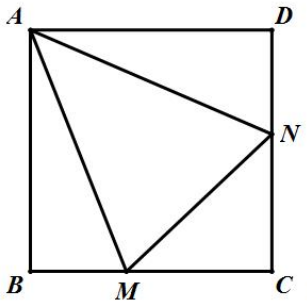


图1

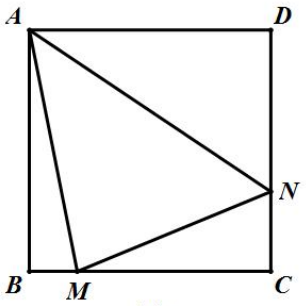


图2

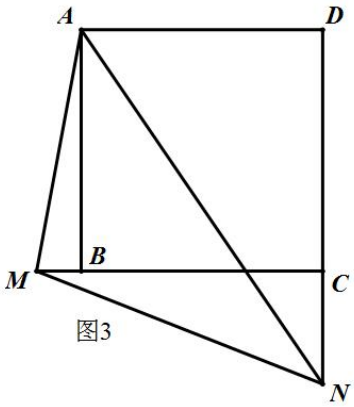
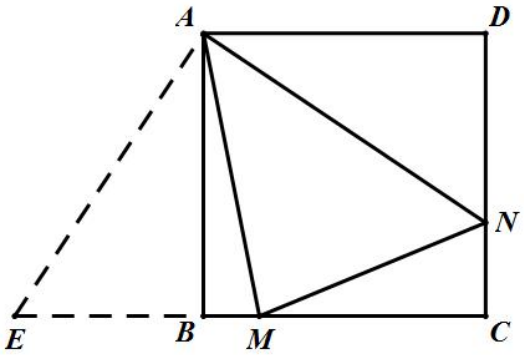


图3

【解答】（1）猜想：*BM*＋*DN*＝*MN*；（2）猜想：*DN*－*BM*＝*MN*

【解析】（1）猜想：*BM*＋*DN*＝*MN*.

证明：如图，将△*AND* 绕点 *A* 顺时针旋转 90°，得到△*ABE*，则 *E*、*B*、*M* 共线，



∴∠*EAM*＝90°－∠*NAM*＝90°－45°＝45°，

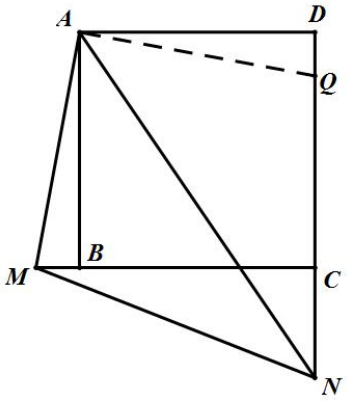
∵∠*NAM*＝45°，在△*AEM* 与△*ANM* 中，

$$\begin{cases} AE=AN \\ \angle EAM=\angle NAM \\ AM=AM \end{cases}, \therefore \triangle AEM \cong \triangle ANM(SAS),$$ ∴*ME*＝*MN*，

∵*ME*＝*BE*＋*BM*＝*DN*＋*BM*，∴*DN*＋*BM*＝*MN*；

（2）猜想：*DN*－*BM*＝*MN*.

证明：在线段 *DN* 上截取 *DQ*＝*BM*，如图所示.



在△ADQ与△ABM中，$\because \begin{cases} AD=AB \\ \angle ADQ=\angle ABM \\ DQ=BM \end{cases}$，$\therefore \triangle ADQ \cong \triangle ABM(SAS)$，

$\therefore \angle DAQ=\angle BAM$，$\therefore \angle QAN=\angle MAN$，

在△AMN与△AQN中，$\because \begin{cases} AQ=AM \\ \angle QAN=\angle MAN \\ AN=AN \end{cases}$，$\therefore \triangle AMN \cong \triangle AQN(SAS)$，

$\therefore MN=QN$，$\therefore DN-BM=MN$.

3. 已知在△ABC中，$\angle ACB=90^\circ$，$CA=CB=6\sqrt{2}$，$CD\perp AB$于D，点E在直线CD上，$DE=\frac{1}{2}CD$，点F在线段AB上，M是DB的中点，直线AE与直线CF交于N点.

（1）如图1，若点E在线段CD上，请分别写出线段AE和CM之间的位置关系和数量关系：_____，_____；

（2）在（1）的条件下，当点F在线段AD上，且$AF=2FD$时，求证：$\angle CNE=45^\circ$；

（3）当点E在线段CD的延长线上时，在线段AB上是否存在点F，使得$\angle CNE=45^\circ$．若存在，请直接写出AF的长度；若不存在，请说明理由.

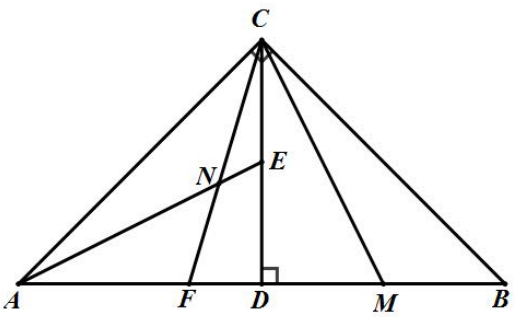
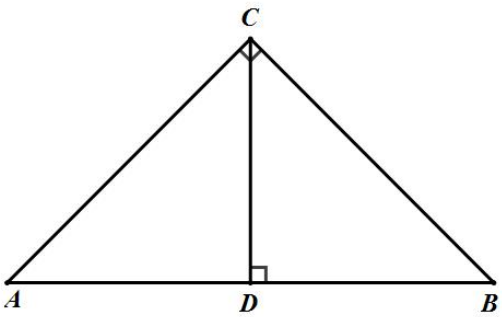


图1

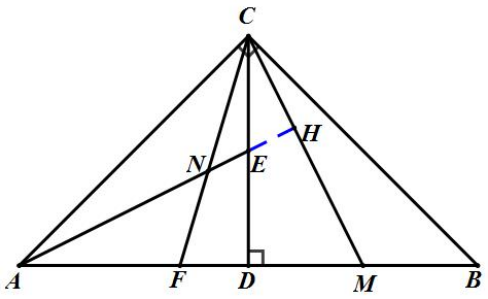


备用图

【解答】（1）$AE\perp CM$，$AE=CM$；（2）见解析；（3）$AF=8$.

【解析】（1）$AE\perp CM$，$AE=CM$.

如图，延长 AE 交 CM 于点 H.



∵ $\angle ACB=90^{\circ}$，$CA=CB=6\sqrt{2}$，$CD\perp AB$ 于点 D，

∴ $\angle CAB=\angle CBA=\angle ACD=\angle BCD=45^{\circ}$，$AD=BD=CD=\frac{1}{2}AB$，

∵ M 是 DB 的中点，∴ $BM=\frac{1}{2}BD$，

∵ ∵ $DE=\frac{1}{2}CD$, ∴ $DE=BM$.

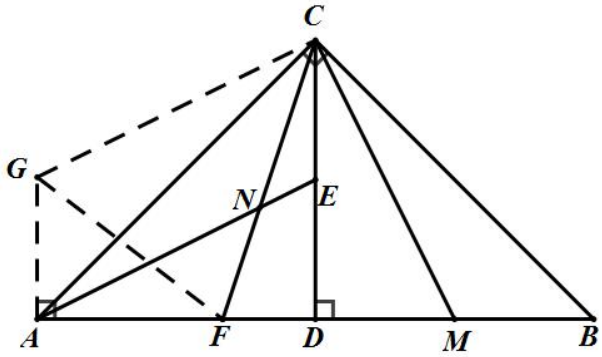
在△AEC 与△CMB 中，∵ $\begin{cases} AC=CB \\ \angle ACE=\angle B \\ CE=BM \end{cases}$，∴ $\triangle AEC\cong\triangle CMN(SAS)$，

∴$AE=CM$，$\angle CAE=\angle BCM$，

∵ $\angle ACM+\angle BCM=90^{\circ}$，∴ $\angle ACM+\angle CAE=90^{\circ}$，∴ $\angle ACH=90^{\circ}$，

∴$AH\perp CM$，∴$AE\perp CM$，$AE=CM$；

（2）如图，过点 A 作 $AG\perp AB$,且 $AG=BM$,，连接 CG、FG,延长 AE 交 CM 于 H.



∵ $\angle CAB=90^{\circ}$，$CA=CB=6\sqrt{2}$，

∴ $\angle CAB=\angle CBA=45^{\circ}$，$AB=\sqrt{CA^2+CB^2}=12$，∴ $\angle GAC=\angle MBC=45^{\circ}$，

∵ $CD\perp AB$，∴ $CD=AD=BD=\frac{1}{2}AB=6$，

∵ M 是 DB 的中点,∴ $BM=DM=3$，∴ $AG=3$，

∵AF=2FD，∴AF=4，DF=2，∴FM=FD+DM=2+3=5，

∵AG⊥AF，$\therefore FG=\sqrt{AG^2+AF^2}=5$，∴FG=FM，

在△CAG 和△CBM 中，$\begin{cases} AC=CB \\ \angle CAG=\angle CBM \\ AG=BM \end{cases}$，$\therefore \triangle CAG\cong\triangle CBM$，

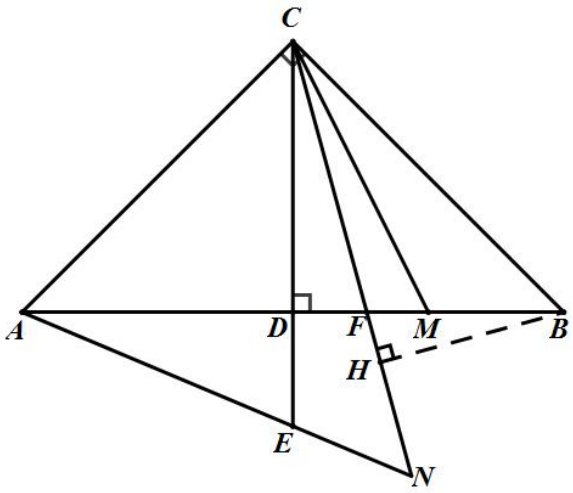
∴CG=CM，∠ACG=∠BCM，

∴∠MCG=∠ACM=∠ACG=∠ACM+∠BCM=90°，在△FCG FCG 和△FCM FCM 中，

$\begin{cases} CG=CM \\ FG=FM \\ CF=CF \end{cases}$，$\therefore \triangle FCG\cong\triangle FCM$，∴∠FCG=∠FCM，∴∠FCH=45°，

由（1）知 AE⊥CM，∴∠CHN=90°，∴∠CNE=45°；

（3）存在，如图作 BH⊥CN.



由条件可得∠CHB=90°，

∵CD⊥AB，∴∠ADE=90°，∠CHB=∠ADE，

∵∠ACB=90$CA=CB=6\sqrt{2}$,∴∠CAB=∠CBA=45°，$AB=\sqrt{CA^2+CB^2}=12$，∴∠GAC=∠MBC=45°，

∵CD⊥AB，$CD=AD=BD=\frac{1}{2}AB=6$，$\because DE=\frac{1}{2}CD$,DE=3.

在 Rt△ADE 中，由勾股定理可得$AE=3\sqrt{5}$，

∵∠CNE=45°，∴∠CBA=∠CNE，

∵∠AFN=∠CFB，∴∠NAF=∠BCF，∴△ADE∽△CHB，

$\therefore \frac{DE}{BH}=\frac{AE}{BC}$，$\therefore \frac{3}{BH}=\frac{3\sqrt{5}}{6\sqrt{2}}$,$\therefore BH=\frac{6}{5}\sqrt{10}$，

设$DF=x$，则$BF=6-x$，在$Rt\triangle CDF$中，由勾股定理，得$CF=\sqrt{36+x^2}$，

$\because \angle CDF=\angle BHF=90°$，$\angle DFC=\angle HFB$，$\therefore \triangle CDF\backsim\triangle BHF$，

$\therefore \frac{CD}{BH}=\frac{CF}{BF},\therefore \frac{6}{\frac{6}{5}\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{36+x^2}}{6-x}$，解得$x_1=2,x_2=18>6$（舍），$\therefore AF=6+2=8$.

4. （1）如图 1，点 E、F 分别是正方形 $ABCD$ 的边 BC、CD 上的点，$\angle EAF=45°$，连接 EF，则 EF、BE、FD 之间的数量关系是：$EF=BE+FD$. 连结 BD，交 AE、AF 于点 M、N，且 MN、BM、DN 满足 $MN^2=BM^2+DN^2$，请证明这个等量关系；

（2）在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，点 D、E 分别为 BC 边上的两点.

①如图 2，当$\angle BAC=60°$，$\angle DAE=30°$时，BD、DE、EC 应满足的等量关系是_____；

②如图 3，当$\angle BAC=\alpha$，$(0°<\alpha<90°)$，$\angle DAE=\frac{1}{2}\alpha$时，$BD$、$DE$、$EC$ 应满足的等量关系是_____

【参考：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$】

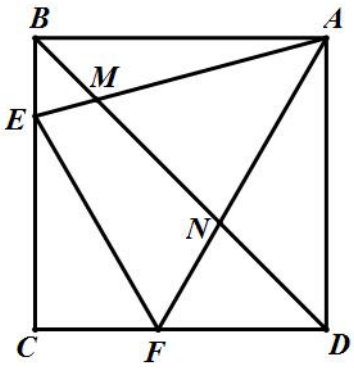


图1

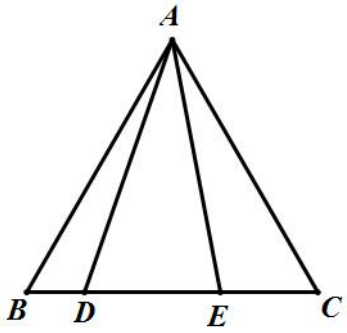


图2

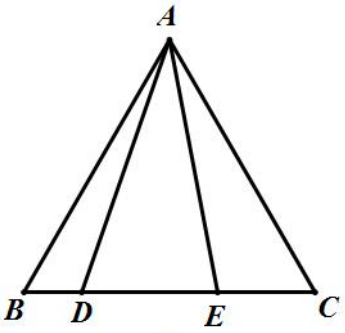
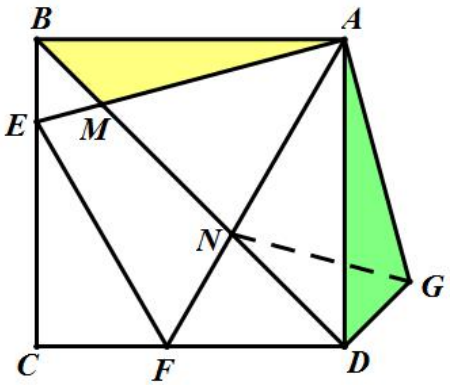


图3

【解答】（1）见解析；（2）$DE^2=BD^2+BD\cdot EC+EC^2$；（3）

$DE^2=BD^2+2\cos\alpha\cdot BD\cdot EC+EC^2$

【解析】如图，将$\triangle ABM$绕点 A 逆时针旋转 90°得到$\triangle ADG$，连接 NG.



∵旋转，∴△ABM≌△ADG，∴DG=BM，AG=AM，∠ADG=∠ABM=45°，∠DAG=∠BAM，

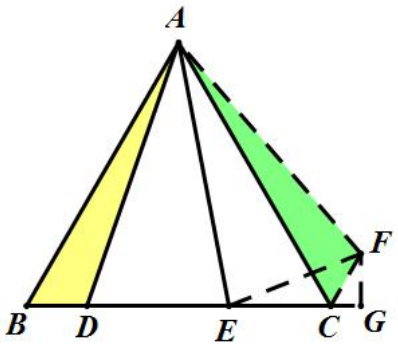
∴∠ADB+∠ADG=45°+45°=90°，即∠NDG=90°，

∵∠EAF=45°，∴∠BAM+∠DAN=45°，∴∠DAG+∠DAF=45°，即∠GAN=45°，

∴∠GAN=∠MAN，∴△AMN≌△AGN（SAS），∴GN=MN，

∵∠NDG=90°，$\therefore GN^2=DN^2+DM^2,\therefore MN^2=DN^2+BM^2$.

（2）①如图，将△ABD 逆时针旋转 60°得到△ACF，连接 EF，作 FG⊥EC 的延长线于点 G.



由题意可知△ABD≌△ACF，∠FGC=90°，∴AD=AF，BD=CF，∠BAD=∠CAF，∠B=∠ACF，

∵∠BAC=60°，AB=AC，∴△ABC 是等边三角形，∴∠B=∠ACB=60°，∴∠ACF=60°，

∴∠ACF+∠ACB=120°，即∠ECF=120°，∴∠FCG=60°，∴∠CFG=30°，$\therefore CG=\frac{1}{2}CF$，

在 Rt△CFG 中，由勾股定理得 $FG=\frac{\sqrt{3}}{2}CF$，∴∠BAD+∠EAC=30°，∠CAF+∠EAC=30°，

即∠EAF=30°，∴∠DAE=∠FAE，∴△ADE≌△AFE，∴DE=EF，

在 Rt△EGF 中，由勾股定理得 $EF^2=EG^2+FG^2$，$\therefore EF^2=(EC+CG)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}CF\right)^2$，

$\therefore EF^2=\left(EC+\frac{1}{2}CF\right)^2+\frac{3}{4}CF^2=EC^2+EC\cdot CF+\frac{1}{4}CF^2+\frac{3}{4}CF^2=EC^2+EC\cdot CF+CF^2$，

$\therefore DE^2=BD^2+BD\cdot EC+EC^2$；

②将△ABD 逆时针旋转α得到△ACF，连接 EF，作 FG⊥EC 的延长线于点 G.

由题意可知△ABD≌△ACF，∠FGC=90°，∴AD=AF，BD=CF，∠BAD=∠CAF，∠B=∠ACF，

∵AB=AC，∴∠B=∠ACB，

∴∠B+∠ACB+∠BAC=180°，∠ACB+∠ACF+∠FCG=180°，∴∠BAC=∠FCG=α，

∴∠ACF=60°，$\therefore CG=\cos\alpha\cdot CF, FG=\sin\alpha\cdot CF$，∴$\angle DAE=\frac{1}{2}\alpha$，

$\therefore \angle BAD+\angle CAE=\frac{1}{2}\alpha$，$\angle CAF+\angle CAE=\frac{1}{2}\alpha$，即$\angle EAF=\frac{1}{2}\alpha$，$\therefore \angle DAE=\angle FAE$，

$\therefore \triangle ADE\cong\triangle AFE$，$\therefore DE=EF$，

在 $Rt\triangle EGF$ 中，由勾股定理得 $EF^2=EG^2+FG^2$，$\therefore EF^2=(EC+CG)^2+(\sin\alpha\cdot CF)^2$，

$\therefore EF^2=\left(EC+\frac{1}{2}CF\right)^2+\frac{3}{4}CF^2=EC^2+EC\cdot CF+\frac{1}{4}CF^2+\frac{3}{4}CF^2=EC^2+EC\cdot CF+CF^2$，

$\therefore DE^2=BD^2+BD\cdot EC+EC^2$；

$\therefore EF^2=(EC+\cos\alpha\cdot CF)^2+\sin\alpha\cdot CF^2=EC^2+2EC\cdot CF\cdot\cos\alpha+(coa^2\alpha+\sin^2\alpha)CF^2$，

$\because \sin^2\alpha+coa^2\alpha=1$，$\therefore DE^2=BD^2+2\cos\alpha\cdot BD\cdot EC+EC^2$.

5. 已知如图 1，四边形 $ABCD$ 是正方形，E，F 分别在边 BC、CD 上，且$\angle EAF=45°$，我们把这种模型称为“半角模型”，在解决“半角模型”问题时，旋转是一种常用的方法.

（1）在图 1 中，连接 EF，为了证明结论“$EF=BE+DF$“，小亮将$\triangle ADF$ 绕点 A 顺时针旋转 90° 后解答了这个问题，请按小亮的思路写出证明过程；

（2）如图 2，当$\angle EAF$ 绕点 A 旋转到图 2 位置时，试探究 EF 与 DF、BE 之间有怎样的数量关系？

（3）如图 3，如果四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$\angle BAD=\angle BCD=90°$，$\angle EAF=45°$，且 $BC=7$，$DC=13$，$CF=5$，求 BE 的长.

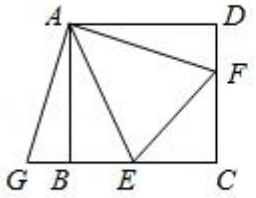


图1

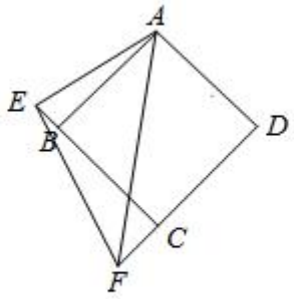


图2

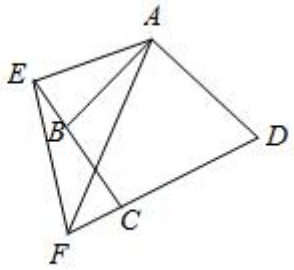


图3

【解答】见解析

【解析】（1）证明：如图 1 中，

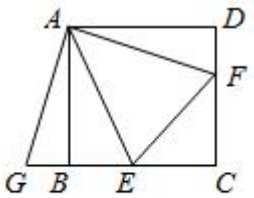


图1

由旋转可得 $GB=DF$，$AF=AG$，$\angle BAG=\angle DAF$，

∵四边形 $ABCD$ 为正方形，

∴$\angle BAD=90°$，

∵$\angle EAF=45°$，

∴$\angle BAE+\angle DAF=45°$，

∴$\angle BAG+\angle BAE=45°=\angle EAF$，

在△AGE 和△AFE 中，

$$\begin{cases} AG=AF \\ \angle GAE=\angle EAF, \\ AE=AE \end{cases}$$

∴△AGE≌△AFE（SAS），

∴$GE=EF$，

∵$GE=GB+BE=BE+DF$，

∴$EF=BE+DF$.

（2）结论：$EF=DF-BE$，

理由：如图 2 中，把△ABE 绕点 A 逆时针旋转 90°到 AD，交 CD 于点 G，

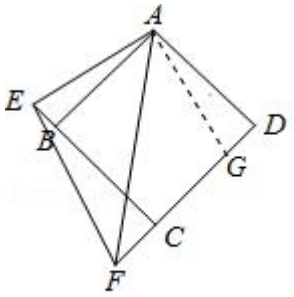


图2

同（1）可证得△AEF≌△AGF（SAS），

∴$EF=GF$，且 $DG=BE$，

∴$EF=DF-DG=DF-BE$.

（3）如图 3 中，在 DC 上取一点 G，使得 $DG=BE$，

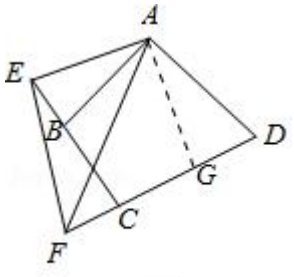


图3

∵∠BAD=∠BCD=90°，

∴∠ABC+∠D=180°，∠ABE+∠ABC=180°，

∴∠ABE=∠D，

∵AB=AD，BE=DG，

∴△ABE≌△ADG（SAS），

∴AE=AG，∠BAE=∠DAG，

∵∠EAF=45°，

∴∠EAB+∠BAF=∠DAG+∠BAF=45°，

∵∠BAD=90°，

∴∠FAG=∠FAE=45°，

∵AE=AG，AF=AF，

∴△AFE≌△AFG（SAS），

∴EF=FG，

设 BE=x，则 EC=EB+BC=x+7，EF=FG=18 - x，

在 Rt△ECF 中，∵EF^2=EC^2+CF^2，

∴5^2+（7+x）^{2}=（18 - x）^{2}，

∴x=5，

∴BE=5.