半角模型巩固练习（基础）

1. 在等腰 $Rt\triangle ABC$ 中，$CA=CB$，$\angle ACB=90°$，O 为 AB 的中点，$\angle EOF=45°$，交 CA 于 F，交 BC 的延长线于 E.

（1）求证：$EF=CE+AF$；

（2）如图 2，当 E 在 BC 上，F 在 CA 的反向延长线上时，探究线段 AF、CE、EF 之间的数量关系，并证明.

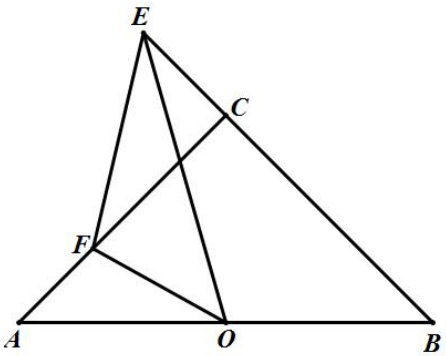


图1

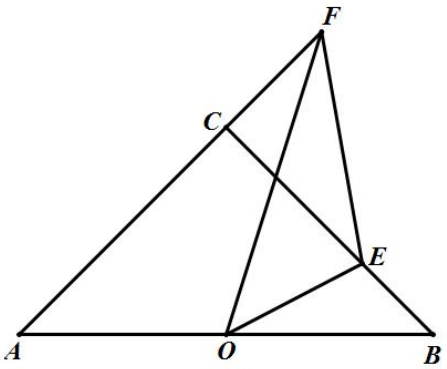
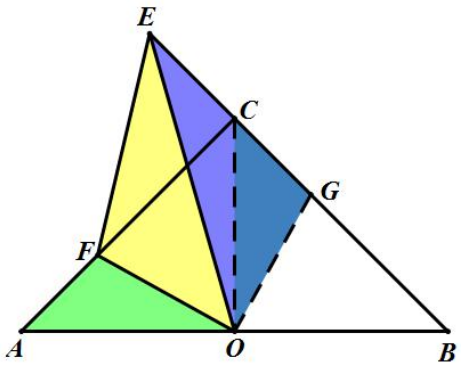


图2

【解答】（1）见解析；（2）$AF-EF=CE$.

【解析】（1）连接 CO，过点 O 作 $OG\perp OF$ 交 BE 于点 G，如图所示：

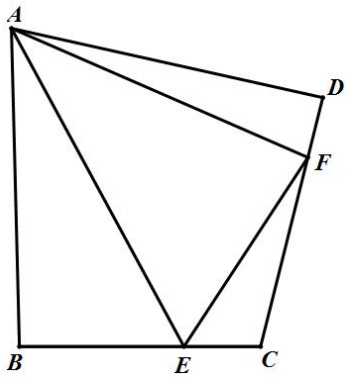


由题意可得 $\triangle AOF\cong\triangle COG$，$\therefore OF=OG$，$\therefore\triangle EOF\cong\triangle EOG$，$\therefore EF=EG$，

$\therefore EF=EG=EC+CG=EC+AF$；

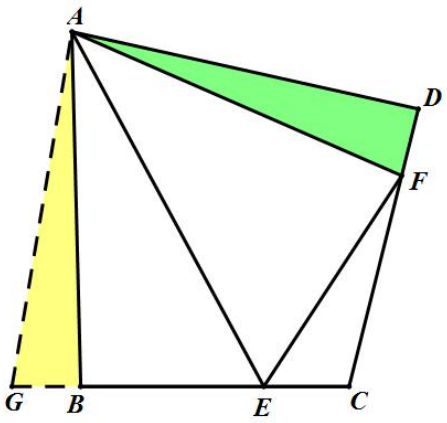
（2）$AF-EF=CE$.

2. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$\angle B+\angle D=180°$，E、F 分别是边 BC、CD 上的点，且 $\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD$，求证：$EF=BE+FD$.



【解答】见解析

【解析】如图，将△*ADF* 顺时针旋转得到△*ABG*，使得 *AD* 与 *AB* 重合.



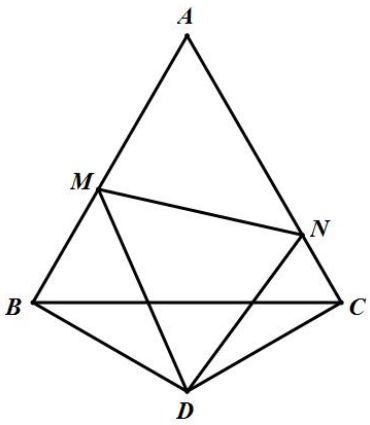
∵旋转，∴△*ADF*≌△*ABG*，∴∠*FAG*＝∠*BAD*，*AF*＝*AG*，*DF*＝*GB*，

∵$\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD$，∴∠*EAF*＝∠*EAG*，

又∵*AE*＝*AE*，∴△*EAG*≌△*EAF*，∴*GE*＝*EF*，

∵*GE*＝*GB*＋*BE*＝*DF*＋*BE*，∴*EF*＝*BE*＋*FD*.

3. 如图，△*ABC* 是边长为 3 的等边三角形，△*BDC* 是等腰三角形，∠*BDC*＝120°，以 *D* 为顶点作一个 60° 的角，使其两边分别交 *AB* 于 *M*，交 *AC* 于 *N*，连接 *MN*，则△*AMN* 的周长是多少？

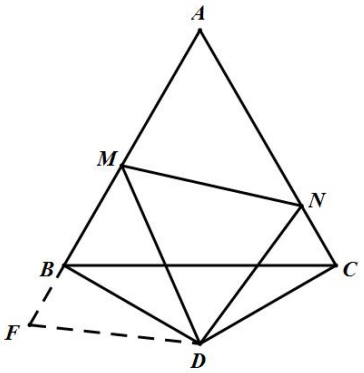


【解答】6

【解析】∵△*BDC* 是等腰三角形，且∠*BDC*＝120°，∴∠*BCD*＝∠*DBC*＝30°，

∵△*ABC* 是边长为 3 的等边三角形，∴∠*ABC*＝∠*BAC*＝∠*BCA*＝60°，∠*DBA*＝∠*DCA*＝90°，

如图，延长 *AB* 至点 *F*，使 *BF*＝*CN*.



连接 *DF*，在△*BDF* 与△*CND* 中，∵ $\begin{cases} BF=CN \\ \angle FBD=DCN \\ DB=DC \end{cases}$，∴△*BDF*≌△*CND*(*SAS*)，

∴∠*BDF*＝∠*CDN*，*DF*＝*DN*，

∵∠*MDN*＝60°，∴∠*BDM*＋∠*CDN*＝60°，∴∠*BDM*＋∠*BDF*＝60°，

在△*DMN* 与△*DMF* 中，∵ $\begin{cases} DM=MD \\ \angle FDM=MDN \\ DF=DN \end{cases}$，∴△*DMN*≌△*DMF*(*SAS*)，

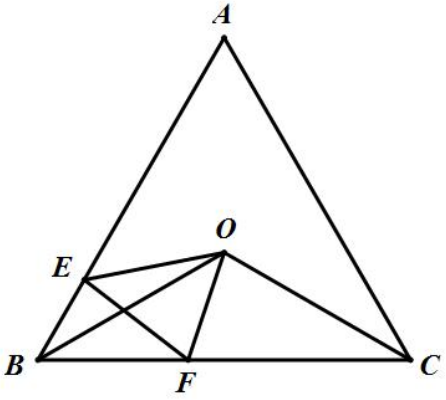
∴*MN*＝*MF*，∴△*AMN* 的周长是：*AM*＋*AN*＋*MN*＝*AM*＋*MB*＋*BF*＋*AN*＝*AB*＋*AC*＝6.

4. 如图，在等边△*ABC* 中，∠*ABC* 与∠*ACB* 的角平分线相交于点 *O*，点 *E*、*F* 分别在线段 *AB*、*BC* 上，连接 *EO*、*FO*，满足∠*EOF*＝60°，连接 *EF*.

（1）①求证：*OB*＝*OC*；

②求∠*BOC* 的度数；

（2）求证：*CF*＝*BE*＋*EF*.



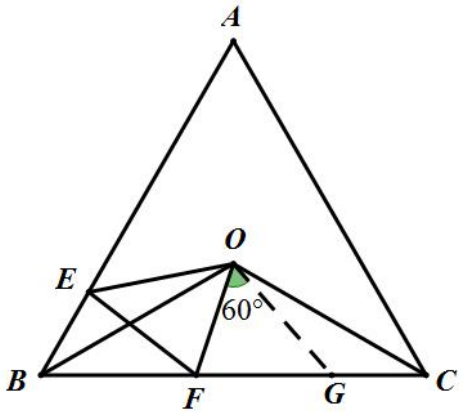
【解答】（1）①见解析；②120°；（2）见解析.

【解析】（1）①∵△*ABC* 是等边三角形，∴∠*ABC*＝∠*ACB*＝60°，

∵*OB*、*OC* 分别平分∠*ABC*、∠*ACB*，∴∠*OBC*＝∠*OCB*＝30°，∴*OB*＝*OC*；

②∵∠*OBC*＝∠*OCB*＝30°，∴∠*BOC*＝180°－∠*OBC*－∠*OCB*＝120°.

（2）如图，以点 *O* 为顶点，*OF* 为一边，作∠*FOG*＝60°交 *BC* 于点 *G*.



∵∠*BOC*＝120°，∴∠*BOF*＋∠*COG*＝60°，

∵∠*EOF*＝60°，∴∠*EOB*＋∠*BOF*＝60°，∴∠*COG*＝∠*EOB*，

∵$\angle ABO=\frac{1}{2}\angle ABC$＝30°，∴∠*EBO*＝∠*OCG*，∴△*BOE*≌△*COG*，∴*OG*＝*OE*，*BE*＝*CG*，

又∵△*OEF*≌△*OGF*，∴*EF*＝*FG*，∴*CF*＝*FG*＋*CG*，∴*CF*＝*EF*＋*BE*.

5. 如图，在平面直角坐标系xOy中，$A(a,0),B(0,b),C(-a,0)$且$\sqrt{a-4}+(b-4)^2=0$.

（1）求证：△*ABC* 是等边三角形；

（2）如图 2，*A*、*B* 两点在 x 轴上、y 轴上的位置不变，在线段 *AB* 上有两动点 *M*、*N*，满足∠*MON*＝45°，试猜想线段 *BM*、*AN*、*MN* 之间的数量关系，并证明你的结论.

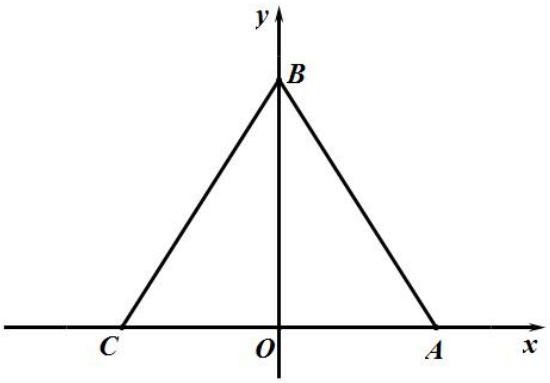


图1

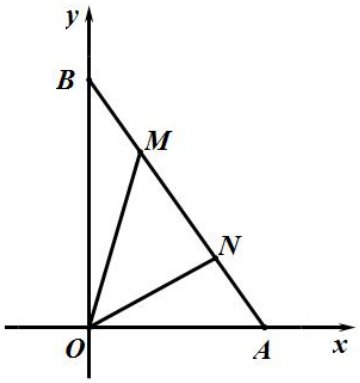


图2

【解答】（1）见解析；（2）$BM^2+AN^2=MN^2$

【解析】（1）∵$\sqrt{a-4}+(b-4)^2=0,\sqrt{a-4}\geqslant 0,(b-4)^2\geqslant 0$，

$\therefore \sqrt{a-4}=0$ 且 $(b-4)^2=0$，$\therefore a=4, b=4$，$\therefore A(4,0)$，$B(0,4), C(-4,0)$，

$\therefore OA=OB=OC=4$，

$\because \angle AOB=\angle BOC=90°$，$\therefore \angle BCA=\angle CBO=\angle OBA=\angle BAC=45°$，

$\therefore BA=BC$ 且 $\angle CBA=90°$，即 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形；

（2）猜想：$BM^2+AN^2=MN^2$.

$\because OA=OB=4$，$\therefore \angle AOB=90°$，

如图，将 $\triangle BOM$ 绕点 O 顺时针旋转 $90°$ 得到 $\triangle AOD$，

$\therefore AD=BM$，$DO=MO$，$\angle OAD=\angle OBM=45°$，且 $\angle DOM=\angle AOB=90°$，$\therefore \angle AOD=\angle BOM$，

$\because \angle MON=45°$，$\angle AOB=90°$，$\therefore \angle BOM+\angle AON=45°$，

$\therefore \angle AOD+\angle AON=45°$，即 $\angle DON=\angle MON=45°$，$\therefore \triangle DON \cong \triangle MON$，$\therefore DN=MN$，

$\because \angle OAD=\angle OBM=\angle BAO=45°$，即 $\angle NAD=90°$，

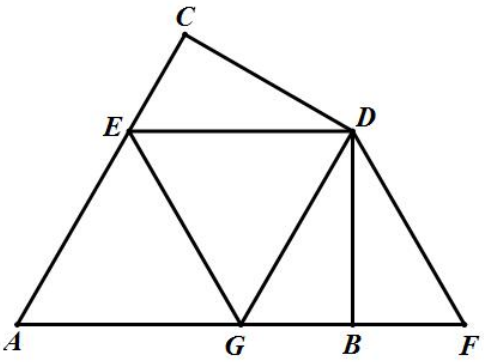
$\therefore AD^2+AN^2=DN^2, \therefore BM^2+AN^2=MN^2$.

6. 在四边形 $ABDC$ 中，$AC=AB$，$DC=DB$，$\angle CAB=60°$，$\angle CDB=120°$，E 是 AC 上一点，F 是 AB 延长线上一点，且 $CE=BF$.

（1）试说明：$DE=DF$；

（2）在图 1 中，若 G 在 AB 上且 $\angle EDG=60°$，试猜想 CE、EG、BG 之间的数量关系并证明；

（3）若题中条件“$\angle CAB=60°$，$\angle CDB=120°$”改为“$\angle CAB=\alpha$，$\angle CDB=180°-\alpha$，G 在 AB 上，那么 $\angle EDG$ 满足什么条件时，（2）中的结论仍然成立？”（直接写结果，不需证明）.



【解答】（1）见解析；（2）$CE+BG=EG$；（3）当 $\angle EDG=90°-\frac{1}{2}\alpha$ 时，$CE+BG=EC$ 仍然成立.

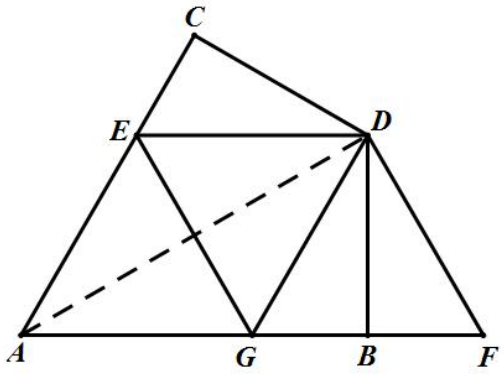
【解析】（1）在四边形 $ADBC$ 中，有 $\angle C+\angle CAB+\angle ABD+\angle CDB=360°$，

$\because \angle CAB=60°$，$\angle CDB=120°$，$\therefore \angle C+\angle ABD=180°$，

又 $\because \angle ABD+\angle DBF=180°$，$\therefore \angle C=\angle BDF$，

在△CDE与△BDF中，$\begin{cases} CD=BD \\ \angle C=\angle DBF \\ CE=BF \end{cases}$，∴△$CDE$≌△$BDF$（$SAS$），∴$DE=DF$；

（2）如图，连接AD.



在△ABD与△ACD中，$\begin{cases} AB=AC \\ BD=CD \\ AD=AD \end{cases}$，∴$\triangle ABD\cong\triangle ACD(SSS)$，

∴$\angle BDA=\angle CDA=\frac{1}{2}\angle CDB=60°$，

∵$\angle EDG=60°$，∴$\angle CDE=\angle ADG$，$\angle ADE=\angle BDG$，

由（1）可知△CDE≌△BDF，∴$\angle CDE=\angle BDF$，∴$\angle BDG+\angle BDF=60°$，即$\angle FDG=60°$，

∴$\angle EDG=\angle FDG$，在△DEG和△DFG中，$\begin{cases} DE=DF \\ \angle EDG=\angle FDG \\ DG=DG \end{cases}$，∴$\triangle DEG\cong\triangle DFG(SAS)$，

∴$EG=FG$，又∵$CE=BF$，$FG=BF+BG$，∴$CE+BG=EG$；

（3）要使$CE+BG=EG$仍然成立，则$\angle EDG=\angle BDA=\frac{1}{2}\angle CDB$，即$\angle EDG=$

$\frac{1}{2}(180°-\alpha)=90°-\frac{1}{2}\alpha$，

∴当$\angle EDG=90°-\frac{1}{2}\alpha$时，$CE+BG=EC$仍然成立.