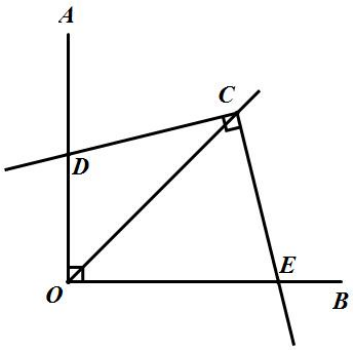
对角互补模型知识精讲

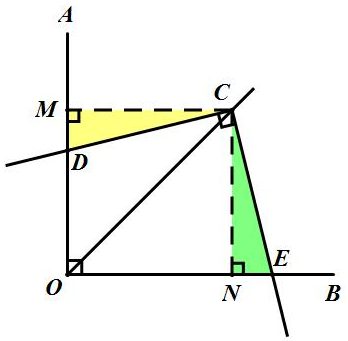
1. 全等型—90°

如图，已知∠*AOB*＝∠*DCE*＝90°，*OC* 平分∠*AOB*.

则可以得到如下几个结论：①*CD*＝*CE*，②*OD*＋*OE*＝$\sqrt{2}$ *OC*，③$S_{\triangle OCD}+S_{\triangle OCE}=\frac{1}{2}OC^2$.



证明：（法一）如图，过点 *C* 作 *CM*⊥*OA* 于点 *M*，*CN*⊥*OB* 于点 *N*.



∵*OC* 平分∠*AOB*，∴*CM*＝*CN*（角平分线上的点到角两边的距离相等），

在正方形 *MONC* 中，由题意可得∠*MCN*＝360°－∠*CMO*－∠*AOB*－∠*CNO*＝90°，∴∠*MCD*＋∠*DCN*＝90°，

又∵∠*DCE*＝90°，∴∠*ECN*＋∠*MCD*＝90°，∴∠*MCD*＝∠*ECN*，

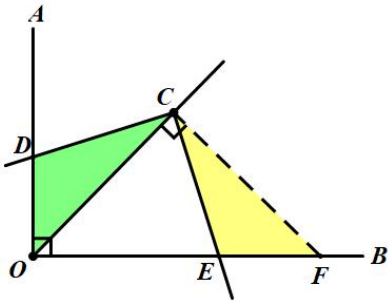
∴△*CDM*≌△*CEN*，∴*CD*＝*CE*，∴结论①成立；

∵四边形 *MONC* 为正方形，∴$OM=ON=\frac{\sqrt{2}}{2}OC$，

又∵*OD*＋*OE*＝*OD*＋*ON*＋*NE*＝*OD*＋*ON*＋*DM*＝*OM*＋*ON*，∴*OD*＋*OE*＝$\sqrt{2}$ *OC*，∴结论②成立；

∴$S_{ODCE}=S_{正方形MONC}=OM\cdot ON=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}OC\right)^2=\frac{1}{2}OC^2$，∴结论③成立.

证明：（法二）如图所示，过点 *C* 作 *CF*⊥*OC* 交 *OB* 于点 *F*，



∵OC 平分∠AOB，∴∠DOC=∠EOC=45°，∴△COF 是等腰直角三角形，

∴CO=CF，∠CFO=∠COD=45°，

又∵∠DCO+∠OCE=∠ECF+∠OCE=90°，∴∠DCO=∠ECF，∴△COD≌△CFE，

∴OD=EF，CD=CE，∴结论①成立；

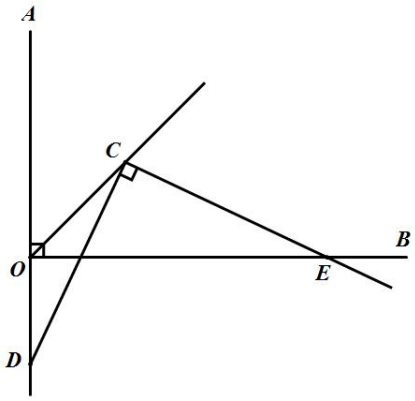
∵∴△COF 是等腰直角三角形，∴OF=$\sqrt{2}\,OC$；

又∵OD+OE=EF+OE=OF，∴OD+OE=$\sqrt{2}\,OC$，∴结论②成立；

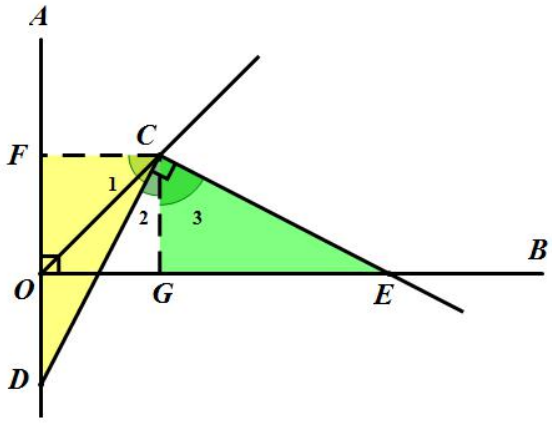
$S_{\triangle OCD}+S_{\triangle OCE}=S_{等腰Rt\triangle COF}=\frac{1}{2}OC\cdot CF=\frac{1}{2}OC^2$，∴结论③成立.

2. 如图，已知∠DCE 的一边与 AO 的延长线交于点 D，∠AOB=∠DCE=90°，OC 平分∠AOB.

则可得到如下几个结论：①CD=CE，②$OE-OD=\sqrt{2}\,OC$，③$S_{\triangle COE}-S_{\triangle COD}=\frac{1}{2}OC^2$.



证明：如图，过点 C 作 $CF\perp OA$，$CG\perp OB$，垂足分别为 F、G.



由角平分线性质可得 $CF=CG$，∴四边形 $CFOG$ 为正方形，

∵∠1＋∠2＝90°，∠3＋∠2＝90°，∴∠1＝∠3，∴△CDF≌△CEG，

∴$CD=CE$，结论①成立；

在正方形 $CFOG$ 中，$OF=OG=\frac{\sqrt{2}}{2}OC$，

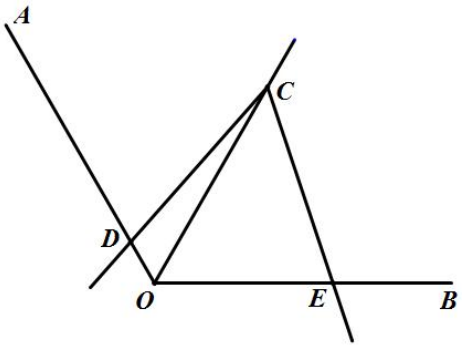
∵$OE-OD=OG+GE-OD=OG+FD-OD=OG+OF$，∴$OE-OD=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}OC=\sqrt{2}OC$，结论②成立；

∵$S_{\triangle COE}-S_{\triangle COD}=\frac{1}{2}OE\cdot OG-\frac{1}{2}OD\cdot CF=\frac{1}{2}OF(OE-OD)=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}OC\times\sqrt{2}OC=\frac{1}{2}OC^2$

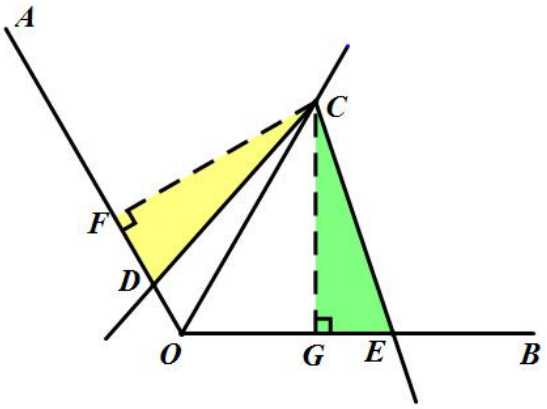
3. 全等型—60°和 120°

如图，已知∠AOB＝2∠DCE＝120°，OC 平分∠AOB.

则可得到如下几个结论：①$CD=CE$，②$OD+OE=OC$，③$S_{\triangle COD}+S_{\triangle COE}=\frac{\sqrt{3}}{4}OC^2$.



证明：如图，过点 C 作 $CF\perp OA$，$CG\perp OB$，垂足分别为 F、G.



由角平分线性质可得 $CF=CG$，在四边形 $OFCG$ 中，$\angle FCG=60°$，

$\because \angle FCD+\angle DCG=\angle GCE+\angle DCG=60°$，$\therefore \angle FCD=\angle GCE$，$\therefore \triangle CDF\cong\triangle CEG$（$ASA$），

$\therefore CD=CE$，结论①成立；

在 $Rt\triangle COF$ 和 $Rt\triangle COG$ 中，$\angle COF=\angle COG=60°$，$\therefore OF=OG=\dfrac{1}{2}OC$，

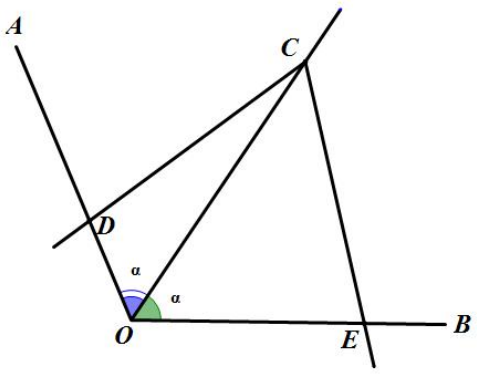
又$\because OD+OE=OD+OG+EG=OD+OG+DF=OF+OG$，$\therefore OD+OE=2\times\dfrac{1}{2}OC=OC$，结论②成立；

$S_{\triangle COD}+S_{\triangle COE}=2S_{\triangle COG}=2\times\dfrac{1}{2}OG\cdot CG=\dfrac{1}{2}OC\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}OC=\dfrac{\sqrt{3}}{4}OC^2$，结论③成立.

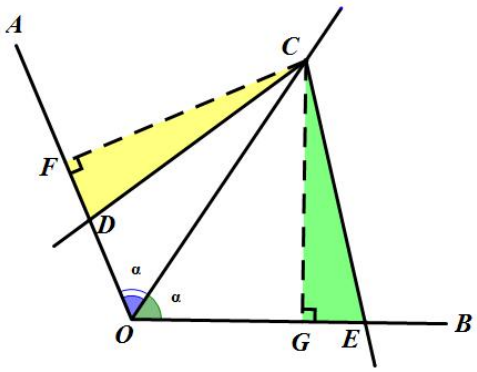
4. 全等型—2α 和$180°-2\alpha$

如图，已知$\angle AOB=2\alpha$，$\angle DCE=180°-2\alpha$，OC 平分$\angle AOB$.

则可以得到以下结论：①$CD=CE$，②$OD+OE=2OC\cdot\cos\alpha$，③$S_{\triangle COD}+S_{\triangle COE}=OC^2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.



证明：如图，过点 C 作 $CF\perp OA$，$CG\perp OB$，垂足分别为 F、G.



证△*CDF*≌△*CEG* 可得 *CD*=*CE*，结论①成立，

在 *Rt*△*COF* 和 *Rt*△*COG* 中，∠*COF*=∠*COG*=α，∴*OF*=*OG*=*OC*·$\cos\alpha$，

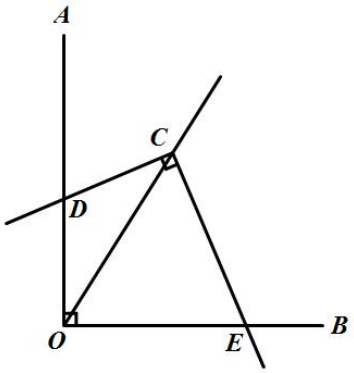
又∵*OD*+*OE*=*OD*+*OG*+*EG*=*OD*+*OG*+*DF*=*OF*+*OG*，∴*OD*+*OE*=2*OC*·*cos*α，结论②成立，

$S_{\triangle COD}+S_{\triangle COE}=2S_{\triangle CPG}=2\times\frac{1}{2}OG\cdot CG=OC\cdot\cos\alpha\cdot OC\cdot\sin\alpha=OC^2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$，结论③成立.

5. 相似型—90°

如图，已知∠*AOB*=∠*DCE*=90°，∠*BOC*=α.

结论：*CE*=*CD*·$\tan\alpha$.



证明【方法一】：如图 1，过点 *C* 作 *CF*⊥*OA*，*CG*⊥*OB*，垂足分别为 *F*、*G*.

先证△*CEG*∽△*CDF*，即$\frac{CE}{CD}=\frac{CG}{CF}$，又∵四边形 *CFOG* 是矩形，∴*CF*=*DG*，

在 *Rt*△*COG* 中，$\tan\alpha=\frac{CG}{OG}$，∴*CE*=*CD*·$\tan\alpha$；

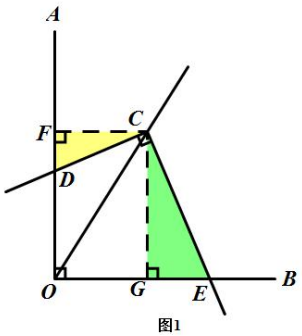


图1

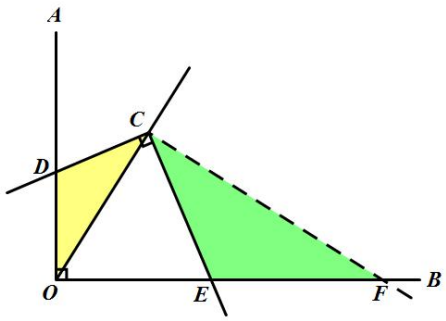


图2

证明【方法二】：如图 2，过点 C 作 $CF\perp OC$ 交 OB 于点 F.

通过证明$\triangle CFE\backsim\triangle COD$ 可得 $\dfrac{CE}{CD}=\dfrac{CF}{CO}=\tan\alpha$.