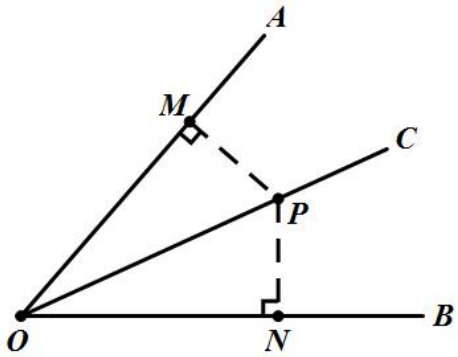
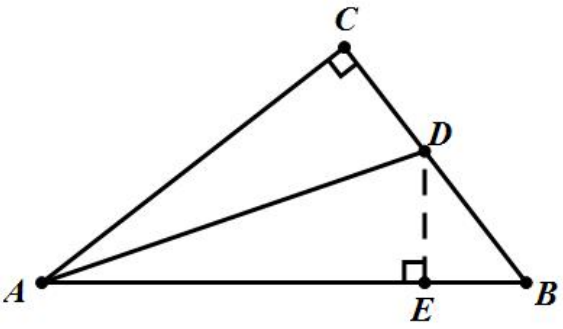
角平分线模型知识精讲

1. 过角平分线上一点向角的两边作垂线段，利用角平分线上的点到角两边的距离相等的性质来解决问题，例：



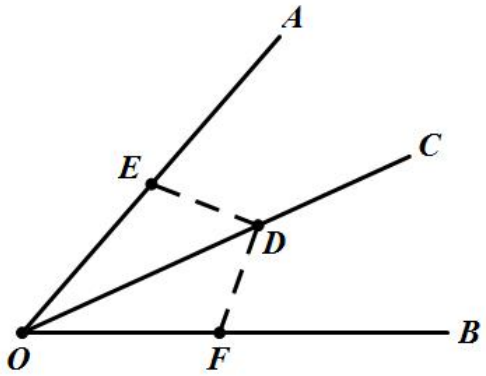
已知：P是$\angle AOB$平分线上的一点，过点P作$PM\perp OA$于点M，过点P作$PN\perp OB$于点N，则$PM=PN$.

2. 若题目中已经有了角平分线和角平分线上一点到一边的垂线段（距离），则作另一边的垂线段，例：



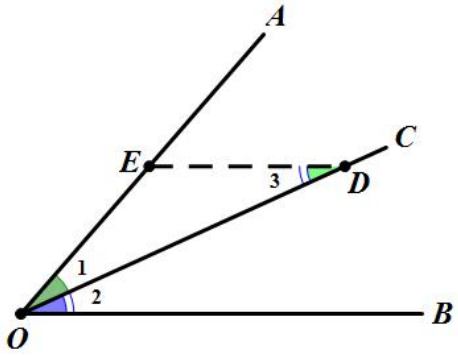
已知：AD是$\angle CAB$的平分线，$\angle C=90°$，过点D作$DE\perp AB$于点E，则$DE=DC$.

3. 在角的两边上取相等的线段，结合角平分线构造全等三角形（角边等，造全等），例：



已知：点D是$\angle AOB$平分线上的一点，在OA、OB上分别取点E、F，且$OE=OF$，连接DE、DF，则$\triangle OED\cong\triangle OFD$.

4. 过角平分线上一点作角的一边的平行线，构造等腰三角形，例：

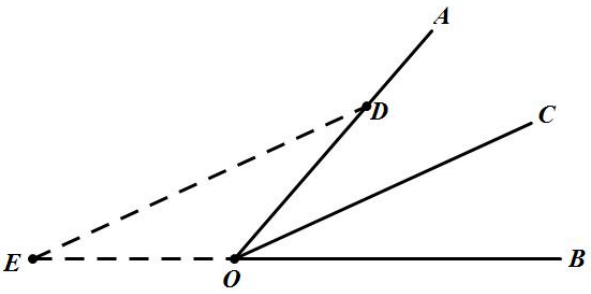


已知：点 D 是 $\angle AOB$ 平分线上的一点，过点 D 作 $DE \parallel OB$，则 $\triangle EOD$ 是等腰三角形，即 $EO = ED$.

证明：$\because OC$ 是 $\angle AOB$ 的平分线，$\therefore \angle 1 = \angle 2$，

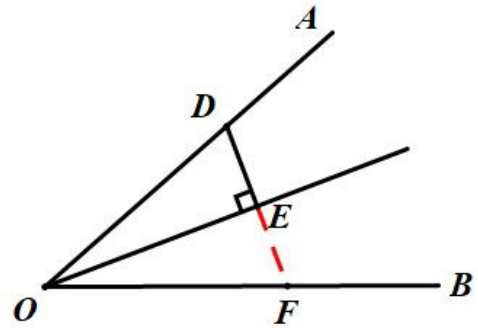
又 $\because DE \parallel AB$, $\therefore \angle 2 = \angle 3$, $\therefore \angle 1 = \angle 3$，$\therefore \triangle EOD$ 是等腰三角形.

5. 有角平分线时，过角一边上的点作角平分线的平行线，交角的另一边所在直线于一点，也可构造等腰三角形，例：



已知：OC 平分 $\angle AOB$，点 D 是 OA 上一点，过点 D 作 $DE \parallel OC$ 交 OB 的反向延长线于点 E，则 $OD = OE$.

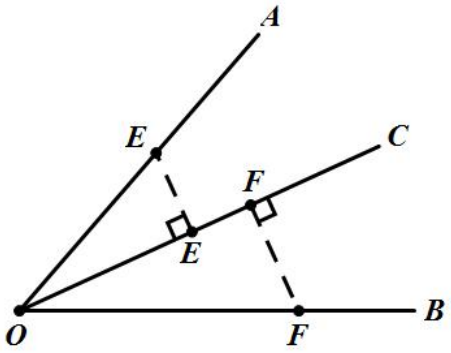
6. 从角的一边上的一点作角平分线的垂线，使之与角的另一边相交，则可得到一个等腰三角形，例：



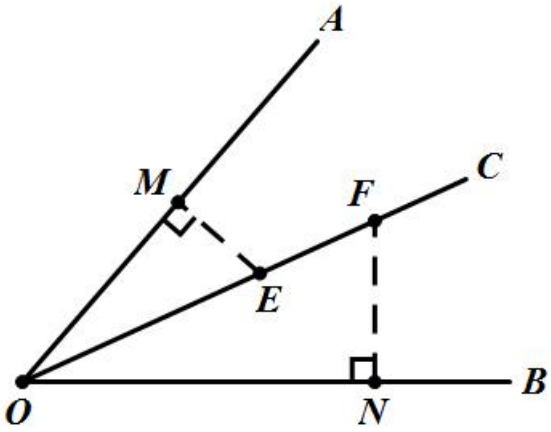
已知：OE 平分 $\angle AOB$，点 D 在 OA 上，$DE \perp OE$，则可延长 DE 交 OB 于点 F，则 $DE = EF$，$OD = OF$，$\angle ODF = \angle OFD$.

7. 有角平分线时，可将等角放到直角三角形中，构造相似三角形，也可以另加一对相等的角构造相似三角形，例：

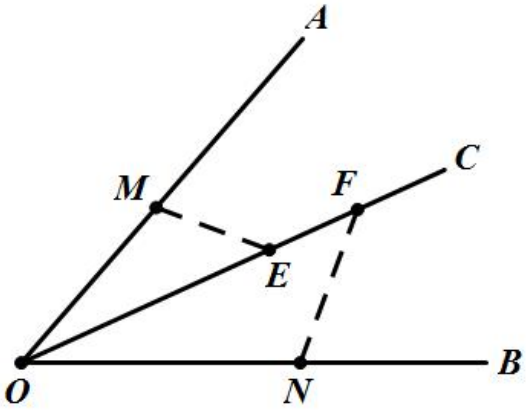
（1）已知：OC 平分 $\angle AOB$，点 E、F 分别在 OA、OB 上，过点 E 作 $EM \perp OC$ 于点 M，过点 F 作 $FN \perp OC$ 于点 N，则 $\triangle OEM \backsim \triangle OFN$，如图所示：



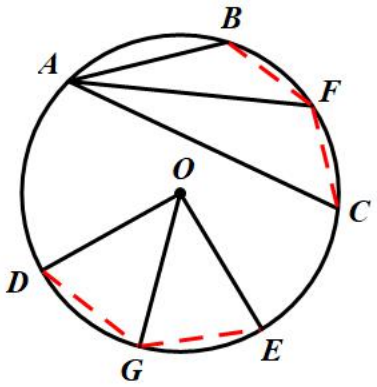
（2）已知：OC 平分 $\angle AOB$，点 E、F 在 OC 上，作 $EM \perp OA$ 于点 M，作 $FN \perp OB$ 于点 N，则 $\triangle OEM \backsim \triangle OFN$，如图所示：



（3）已知：OC 平分 $\angle AOB$，点 E、F 在 OC 上，作 $\angle EMO = \angle FNO$，则 $\triangle OEM \backsim \triangle OFN$，如图所示：

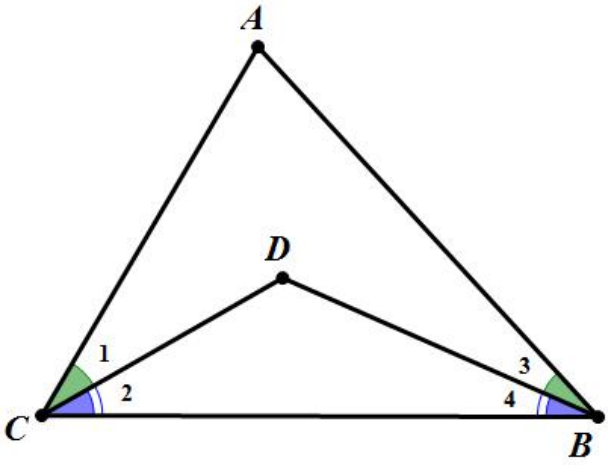


8. 利用“在同圆或等圆中，相等的圆周角（圆心角）所对的弦相等”可得相等线段，例：



已知：$\angle BAC$ 是圆 O 的圆周角，$\angle DOE$ 是圆 O 的圆心角，AF 平分 $\angle BAC$，OG 平分 $\angle DOE$，连接 BF、CF、DG、EG，则 $BF=CF$，$DG=EG$.

9. 【内内模型】如图，$\triangle ABC$ 两个内角平分线交于点 D，则 $\angle D=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A$.



证明：$\because CD$ 平分 $\angle ACB$，BD 平分 $\angle ABC$，$\therefore \angle 1=\angle 2,\angle 3=\angle 4$，

在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A+\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=80^\circ$ ①

在 $\triangle DBC$ 中，$\angle D+\angle 2+\angle 4=180^\circ$ ②

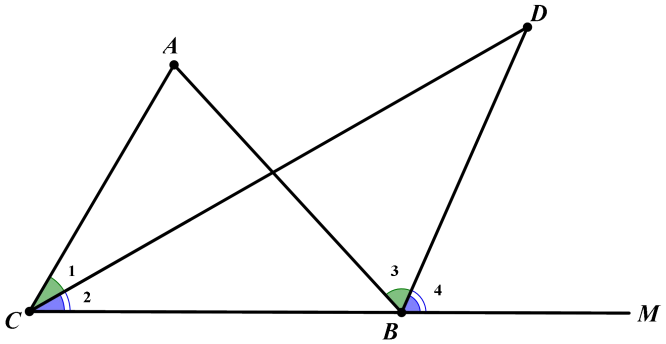
$\because \angle 1=\angle 2,\angle 3=\angle 4$，

$$\therefore \begin{cases} \angle A+2\angle 2+2\angle 4=180^\circ & ① \\ \angle D+\angle 2+\angle 4=180^\circ & ② \end{cases}$$

由 ① − ② × 2 得 $\angle A+2\angle 2+2\angle 4-2\angle D-2\angle 2-2\angle 4=360^\circ-180^\circ$，

$\therefore \angle A-2\angle D=180^\circ$，即 $\angle D=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A$.

10. 【内外模型】如图，$\triangle ABC$ 的一个内角平分线和一个外角平分线交于点 D，则 $\angle D=\frac{1}{2}\angle A$.



证明：$\because CD$ 平分 $\angle ACB$，BD 平分 $\angle ABM$，$\therefore \angle 1=\angle 2,\angle 3=\angle 4$，

在$\triangle ABC$中，$\angle A+\angle ACB=\angle ABM$，即 $\angle A+\angle 1+\angle 2=\angle 3+\angle 4$ ①

在$\triangle DBC$中，$\angle D+\angle 2=\angle 4$ ②

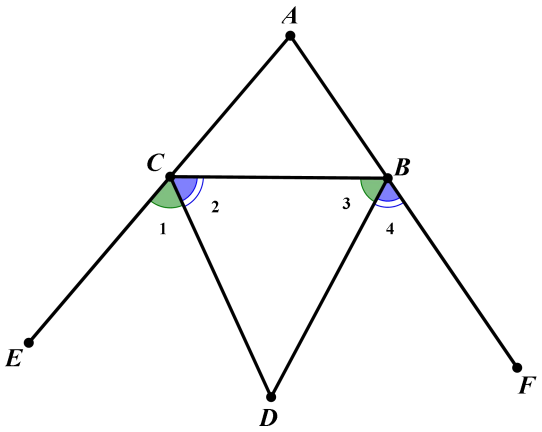
$\because \angle 1=\angle 2,\angle 3=\angle 4$

$\therefore \begin{cases}\angle A+2\angle 2=2\angle 4 & ① \\ \angle D+\angle 2=\angle 4 & ②\end{cases}$

由①－②×2得 $\angle A+2\angle 2-2\angle D-2\angle 2=2\angle 4-2\angle 4$,

$\therefore \angle A=2\angle D$，即 $\angle D=\dfrac{1}{2}\angle A$.

11. 【外外模型】如图，$\triangle ABC$两个外角的角平分线交于点 D，则 $\angle D=90°-\dfrac{1}{2}\angle A$.



证明：$\because CD$ 平分 $\angle BCE$，BD 平分 $\angle CBF$，$\therefore \angle 1=\angle 2,\angle 3=\angle 4$，

在$\triangle ABC$中，$\angle A+\angle ACB+\angle ABC=180°$，即 $\angle ACB+\angle ABC=180°-\angle A$ ①

$\because \angle ACB=180°-\angle BCE=180°-\angle 1-\angle 2,\angle ABC=180°-\angle CBF=180°-\angle 3-\angle 4$，

$\therefore \angle ACB+\angle ABC=180°-\angle 1-\angle 2+180°-\angle 3-\angle 4=360°-\angle 1-\angle 2-\angle 3-\angle 4$ ②

由①=②，得$\angle A+180°=\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4$，

在$\triangle BCD$中，$\angle 2+\angle 3+\angle D=180°$，

$\because \angle 1=\angle 2,\angle 3=\angle 4$，$\therefore \angle A+180°=2(\angle 2+\angle 3)$，

即$\begin{cases}\angle A+180°=2(\angle 2+\angle 3) & ③\\ \angle 2+\angle 3+\angle D=180° & ④\end{cases}$，

由④可得$\angle 2+\angle 3=180°-\angle D$，代入③式可得$\angle A+180°=2(180°-\angle D)$，

整理可得$\angle D=90°-\frac{1}{2}\angle A$.