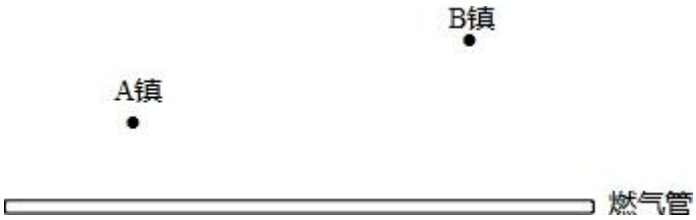
专题 11 最短距离问题

重点突破

1. **知识点一　解决最短路径问题的基本步骤：**
2. **实际问题---数学模型（点、线）**
3. **未知---已知**
4. **利用轴对称变换和平移变化**
5. **根据“两点之间，线段最短”，确定最短路径**

考查题型

典例 1.（2019·庆阳市期中）下图，要在燃气管道 L 上修建一个泵站，分别向 A、B 两镇供气．泵站修在管道的什么地方，可使所用的输气管线最短？（不写做法，保留作图痕迹）

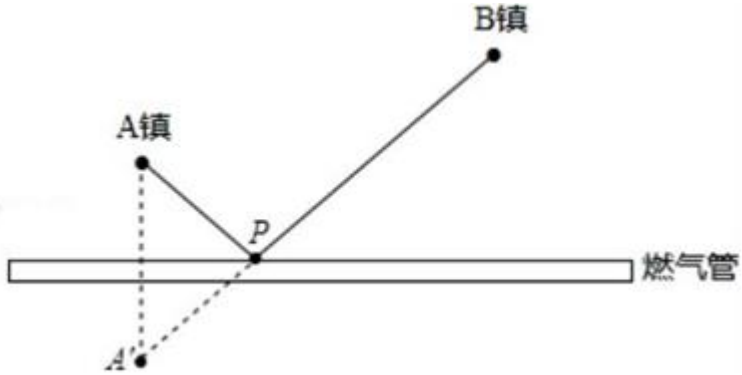


【答案】见解析

【详解】

试题分析：作出 A 镇关于燃气管道的对称点 A′，连接 A′B，根据轴对称确定最短路线问题，A′B 与燃气管道的交点即为所求的点 P 的位置．

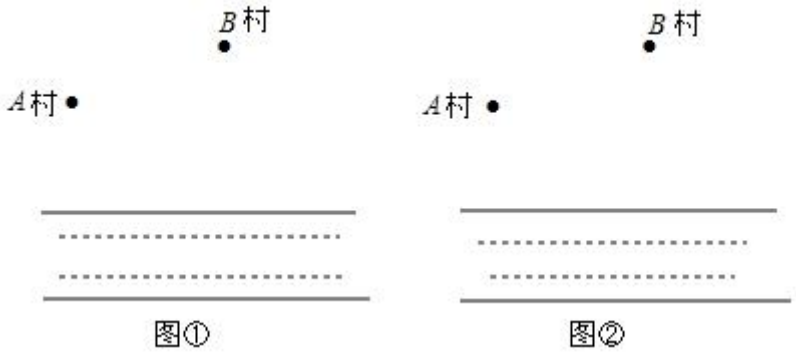
试题解析：作点 A 关于燃气管道的对称点 A′，连接 A′B 交燃气管道于点 P，即点 P 即为所求．



变式 1-1.（2018·济南市莱芜区期末）作图题.如图，小河边有两个村庄 A、B，要在河边建一自来水厂 P，向 A 村 B 村供水．

（1）若要使厂部到 A、B 两村的距离相等，则厂部 P 应选在哪里？在图①中画出；

（2）若要使厂部到 A、B 两村的输水管长度之和最小，则厂部 P 应选在什么地方？在图②中画出．（保留作图痕迹，不写作法，但要写结论）

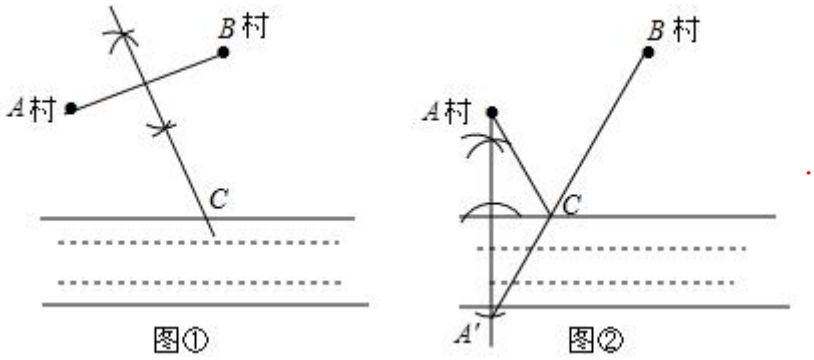


【答案】(1)见解析；（2）见解析

【详解】

解：（1）如图①所示：点 C 即为所求；

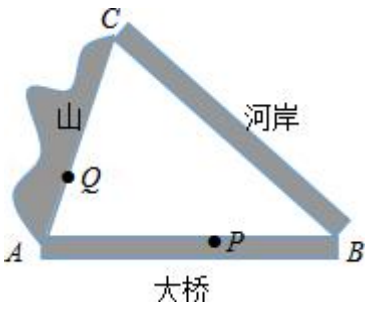
（2）如图②所示：点 C 即为所求.



【点睛】

此题主要考查了作图与应用设计，关键是掌握在直线 L 上的同侧有两个点 A、B，在直线 L 上有到 A、B 的距离之和最短的点存在，可以通过轴对称来确定，即作出其中一点关于直线 L 的对称点，对称点与另一点的连线与直线 L 的交点就是所要找的点.

变式 1-2.（2020•河西区期末）如图，一个旅游船从大桥 AB 的 P 处前往山脚下的 Q 处接游客，然后送往河岸 BC 上，再回到 P 处，请画出旅游船的最短路径.



【答案】见解析

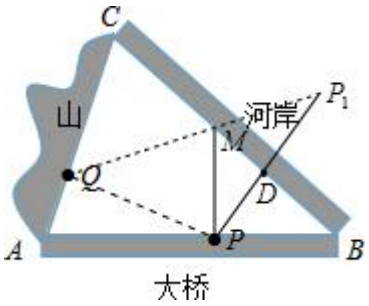
【解析】

试题分析：根据“两点之间线段最短”，和轴对称最短路径问题解答.

解：（1）两点之间，线段最短，连接 PQ；

（2）作 P 关于 BC 的对称点 P_1，连接 QP_1，交 BC 于 M，再连接 MP.

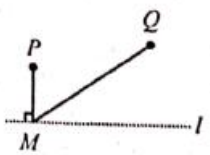
最短路线 P－－Q－－M－－P.

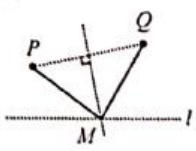


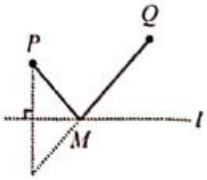
巩固练习

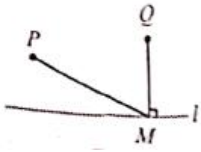
一、单选题（共 10 小题)

1.（2020·济南市期末）某平原有一条很直的小河和两个村庄，要在此小河边的某处修建一个水泵站向这两个村庄供水. 某同学用直线（虚线）l表示小河，P,Q两点表示村庄，线段（实线）表示铺设的管道，画出了如下四个示意图，则所需管道最短的是（　　）.

A. 

B. 

C. 

D. 

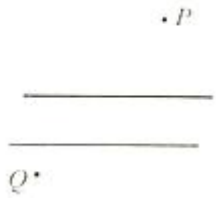
【答案】C

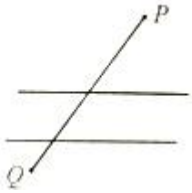
【详解】

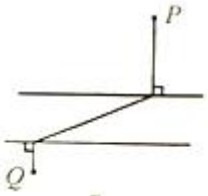
根据题意，所需管道最短，应过点 P 或点 Q 作对称点，再连接另一点，与直线 l 的交点即为水泵站 M，故选项 A、B、D 均错误，选项 C 正确，

故选：C.

2.（2019·余杭区期末）如图，平行河岸两侧各有一城镇P，Q，根据发展规划，要修建一条公路连接P，Q两镇，已知相同长度造桥总价远大于陆上公路造价，为了尽量减少总造价，应该选择方案（　　）



A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】C

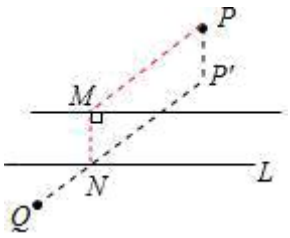
【分析】

作 PP'垂直于河岸 L，使 PP′等于河宽，连接 QP′，与河岸 L 相交于 N，作 NM⊥L，根据平行线的判定与性质，易证得此时 PM+NQ 最短.

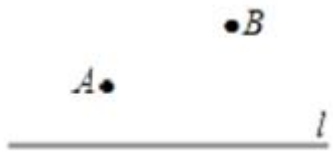
【详解】

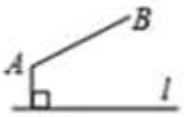
解：如图，作 PP'垂直于河岸 L，使 PP′等于河宽，连接 QP′，与河岸 L 相交于 N，作 NM⊥L，则 MN∥PP′且 MN＝PP′，于是四边形 PMNP′为平行四边形，故 PM＝NP′. 根据“两点之间线段最短”，QP′最短，即 PM+NQ 最短．观察选项，选项 C 符合题意．

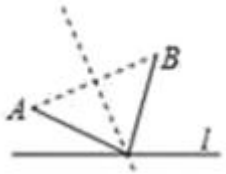
故选 C.

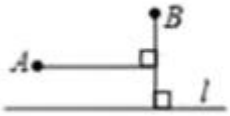


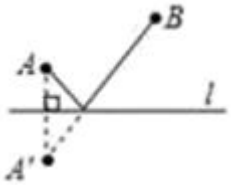
3.（2020·泰安市期中）如图，直线 l 是一条河，A、B 是两个新农村定居点．欲在 l 上的某点处修建一个水泵站，由水泵站直接向 A、B 两地供水．现有如下四种管道铺设方案，图中实线表示铺设的供水管道，则铺设管 道最短的方案是（　　）



A．

B．

C．

D．

【答案】D

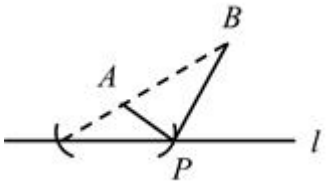
【详解】

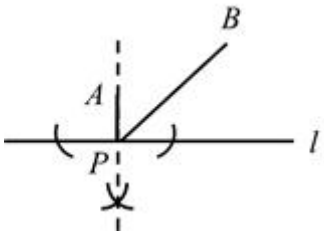
作点 A 关于直线 l 的对称点 A′，连接 BA′交直线 l 于 M．

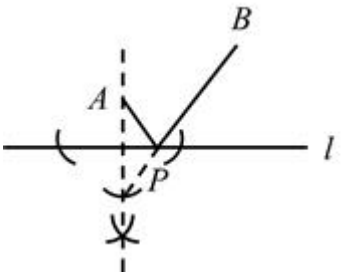
根据两点之间，线段最短，可知选项 D 铺设的管道，则所需管道最短．

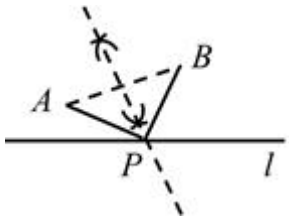
故选：D．

4．（2017·宁德市期末）如图，点 A，B 在直线 l 的同侧，若要用尺规在直线 l 上确定一点 P，使得 AP+BP 最短，则下列作图正确的是（　　）

A．

B．

C．

D．

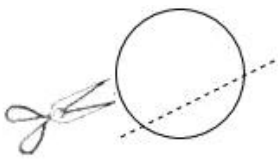
【答案】C

【解析】

根据对称的性质以及两点之间线段最短可知选项 C 是正确的．

故选 C．

5．（2019·承德市期中）如图,小明同学用剪刀沿着虚线将一张圆形纸片剪掉一部分,发现剩下纸片的周长比原来的周长要小,能正确解释这一现象的数学知识是(　　)



A．两点之间，直线最短

B．经过一点，有无数条直线

C．两点确定一条直线

D．两点之间，线段最短

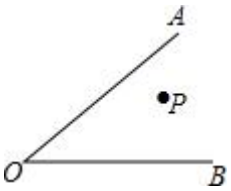
【答案】D

【详解】

解：能正确解释这一现象的数学知识是两点之间，线段最短．

故选：D．

6．（2019·盘锦市期末）如图，P为$\angle AOB$内一定点，M、N分别是射线OA、OB上一点，当$\triangle PMN$周长最小时，$\angle OPM=50°$，则$\angle AOB=$（　　）



A．40°　　B．45°　　C．50°　　D．55°

【答案】A

【分析】

作P关于OA，OB的对称点P_1，P_2．连接OP_1，OP_2．则当M，N是P_1P_2与OA，OB的交点时，$\triangle PMN$的周长最短，根据对称的性质可以证得：$\angle OP_1M=\angle OPM=50°$，$OP_1=OP_2=OP$，根据等腰三角形的性质即可求解．

【详解】

解：作P关于OA，OB的对称点P_1，P_2．连接OP_1，OP_2．则当M，N是P_1P_2与OA，OB的交点时，$\triangle PMN$的周长最短，连接P_1O、P_2O，

∵PP_1关于OA对称，

∴$\angle P_1OP=2\angle MOP$，$OP_1=OP$，$P_1M=PM$，$\angle OP_1M=\angle OPM=50°$

同理，$\angle P_2OP=2\angle NOP$，$OP=OP_2$，

∴$\angle P_1OP_2=\angle P_1OP+\angle P_2OP=2(\angle MOP+\angle NOP)=2\angle AOB$，$OP_1=OP_2=OP$，

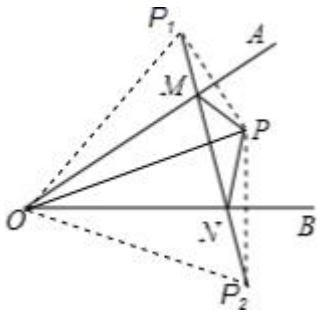
∴$\triangle P_1OP_2$是等腰三角形．

∴$\angle OP_2N=\angle OP_1M=50°$，

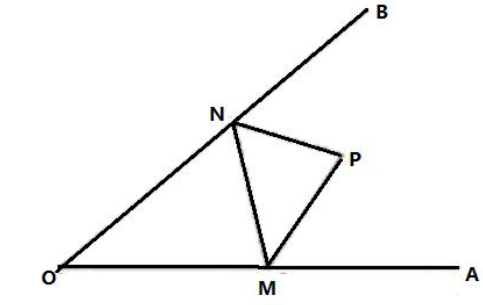
∴$\angle P_1OP_2=180°-2\times50°=80°$，

∴$\angle AOB=40°$，

故选：A．



7.（2019·商丘市期末）如图，点P是$\angle AOB$内任意一点，且$\angle AOB=35°$，点M和点N分别是射线OA和射线OB上的动点，当ΔPMN周长取最小值时，则$\angle MPN$的度数为（　）



A．145°　　B．110°　　C．100°　　D．70°

【答案】B

【分析】

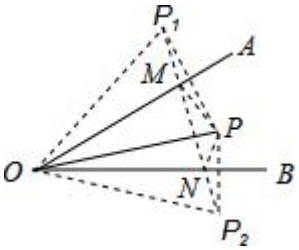
分别作点 P 关于 OA、OB 的对称点 P_1、P_2，连 P_1、P_2，交 OA 于 M，交 OB 于 N，△PMN 的周长=P_1P_2，然后得到等腰△OP_1P_2 中，$\angle OP_1P_2+\angle OP_2P_1=100°$，即可得出$\angle MPN=\angle OPM+\angle OPN=\angle OP_1M+\angle OP_2N=100°$.

【详解】

解：分别作点 P 关于 OA、OB 的对称点 P_1、P_2，连接 P_1P_2，交 OA 于 M，交 OB 于 N，则

$OP_1=OP=OP_2$，$\angle OP_1M=\angle MPO$，$\angle NPO=\angle NP_2O$，

∴$\angle P_1OM=\angle MOP$，$\angle NOP=\angle N\,O\,P_2$，



根据轴对称的性质，可得 $MP=P_1M$，$PN=P_2N$，则

△PMN 的周长的最小值=P_1P_2，

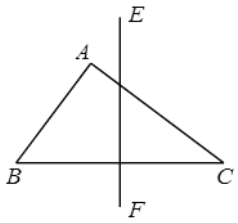
∴$\angle P_1OP_2=2\angle AOB=70°$，

∴等腰△OP_1P_2中，$\angle OP_1P_2+\angle OP_2P_1=110°$，

∴$\angle MPN=\angle OPM+\angle OPN=\angle OP_1M+\angle OP_2N=110°$，

故选：B.

8.（2020·丰台区期末）如图，在△*ABC*中，*AB*=3，*AC*=4，*BC*=5，*EF*是*BC*的垂直平分线，*P*是直线*EF*上的任意一点，则*PA*+*PB*的最小值是（　　）

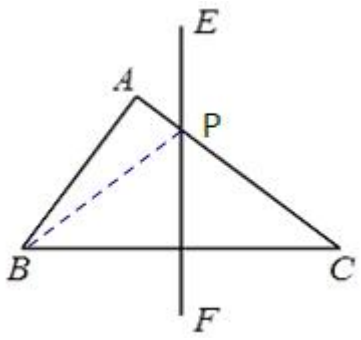


A．3　　B．4　　C．5　　D．6

【答案】B

【详解】

解：如图：



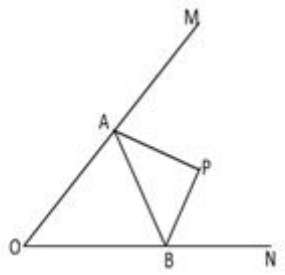
∵EF 垂直平分 BC，

∴B、C 关于 EF 对称，

∴当 AC 交 EF 于 P 时，AP+BP 的值最小，最小值等于 AC 的长为 4，

故选：B.

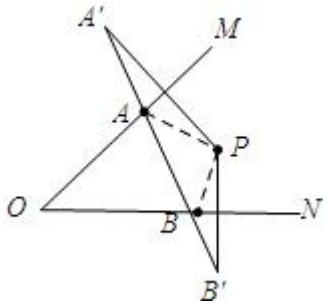
9.（2018·安庆市期末）如图，∠MON=45°，*P*为∠MON内一点，A为OM上一点，B为ON上一点，当△PAB的周长取最小值时，∠APB的度数为(　　)



A．80°　　B．90°　　C．110°　　D．120°

【答案】B

【详解】



作出 P 点关于 OM、ON 的对称点 A′、B′，然后连接 A′B′

∵点 A′与点 P 关于直线 OM 对称，点 B′与点 P 关于 ON 对称

∴A′P⊥OM，B′P⊥ON，A′A=AP，B′B=BP

∴∠A′=∠APA′，∠B′=∠BPB′

∵A′P⊥OM，B′P⊥ON，

∴∠MON+∠A′P B′=180°

∴∠A′P B′=180°-45°=135°

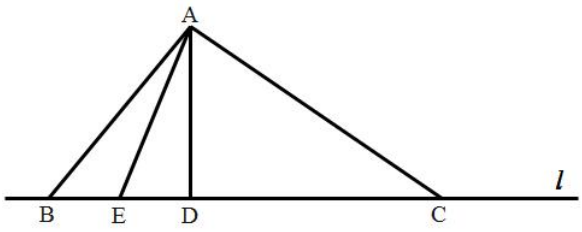
在△A′B′P 中，由三角形的内角和定理可知：∠A′+∠B′=180°-135°=45°

∴∠A′PA+∠BP B′=45°

∴∠APB=135°-45°=90°

故答案选择：B

10．（2020·杭州市期末）如图，A 是直线 l 外一点，点 B，E，D，C 在直线 l 上，且 $AD \perp l$，D 为垂足，如果量得 $AB = 7cm$，$AE = 6cm$，$AD = 5cm$，$AC = 11cm$，则点 A 到直线 l 的距离为（　　）



A．11 cm　　B．7 cm　　C．6 cm　　D．5 cm

【答案】D

【详解】

∵AD=5cm，∴点 A 到直线 l 的距离是 5cm.

故选 D.

二、解答题（共 7 小题）

11.（2018·腾冲市期末）作图题（保留作图痕迹，不写作法）

如图，A、B 两村在一条小河 MN 的同一侧，要在河边建一水厂向两村供水.

（1）若要使自来水厂到两村的距离相等，在图 1 中用尺规作图作出厂址 P 的位置.

（2）若要使自来水厂到两村的输水管用料最省，在图 2 中作出厂址 Q 的位置.

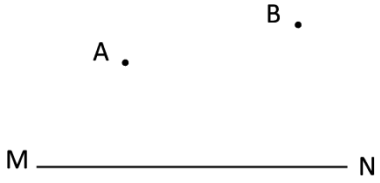


图 1

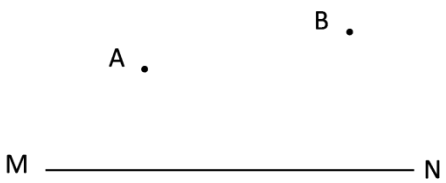
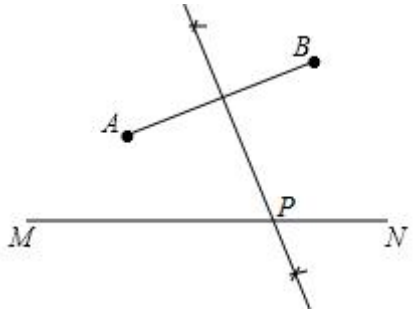


图 2

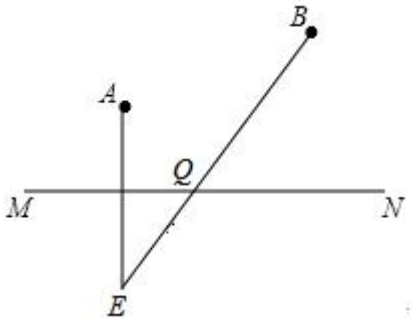
【答案】作图见解析.

【解析】

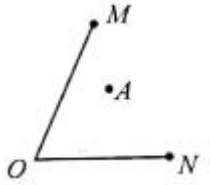
试题解析：（1）如图所示：点 P 即为所求；



（2）如图所示：点 Q 即为所求.



12. 如图所示，已知点A是锐角$\angle MON$内一点，试分别在OM,ON上确定B,C两点，使三角形ABC的周长最小，写出你作图的主要步骤并标明你确定的点.



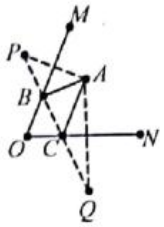
【答案】见详解.

【分析】

要使三角形ABC的周长最小，即 A、B、C 三点可转换到一条直线上，即作点 A 关于射线 OM、ON 的对称点 P、Q，连结 PQ，分别交 OM、ON 于点 B、C，即为所求点.

【详解】

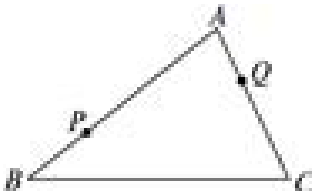
作法：（1）分别作点 A 关于射线 OM、ON 的对称点 P、Q，



（2）连结 PQ，分别交 OM、ON 于点 B、C.

则 B、C 就是所要求的点.

13．如图所示，P，Q 为$\triangle ABC$ 边上的两个定点，在 BC 上求作一点 R，使$\triangle PQR$ 的周长最小.

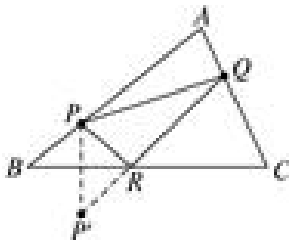


【答案】见解析

【解析】

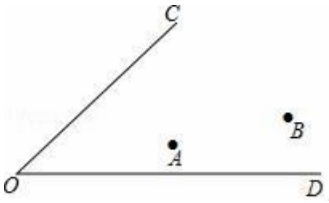
试题解析：(1)作点 P 关于 BC 所在直线的对称点 P'，

(2)连接 $P'Q$，交 BC 于点 R，则点 R 就是所求作的点(如图所示).



14．（2018·威海市期末）尺规作图：（不要求写作法，只保留作图痕迹）

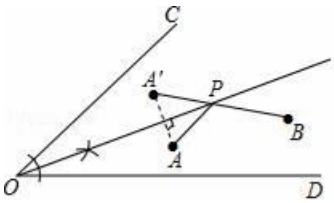
如图，工厂 A 和工厂 B，位于两条公路 OC、OD 之间的地带，现要建一座货物中转站 P．若要求中转站 P 到两条公路 OC、OD 的距离相等，且到工厂 A 和工厂 B 的距离之和最短，请用尺规作出 P 的位置.



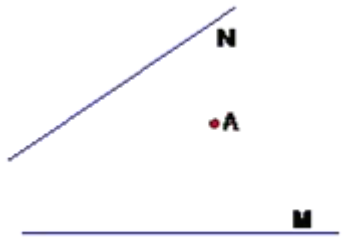
【答案】详见解析.

【详解】

解：如图所示：点 P 即为所求.



15．在旷野上，一个人骑马从 A 处出发，他先到河边 N 饮水，再到草场 M 出放马，然后返回 A 地，如图，请问他应该怎样走才能使总路程最短？

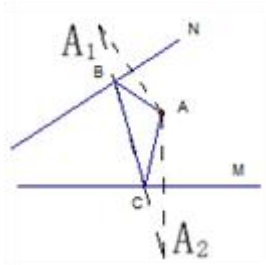


【答案】见解析.

【解析】

试题分析：先分别作出点A关于两直线的对称点A'、A''，连接$A'A''$交两直线于B,C. 则$A \to B \to C \to A$就是所求路径.

试题解析：如图：



(1)作点A关于N的对称点A_1,

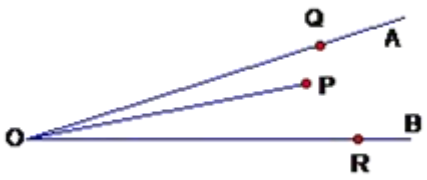
(2)作点A关于M的对称点 A_2,

(3)连接A_1A_2，分别交N,M于点B,C.

(4)连接AB,AC.

此人走路线$A \to B \to C \to A$,才能使总路程最短.

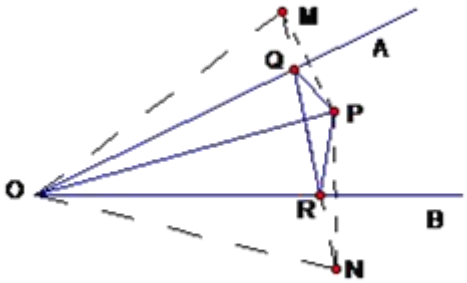
16．如图，∠AOB=30°，角内有一点 P，PO=10cm,两边上各有一点 Q、R（均不同于点 O）则△PQR 的周长的最小值是_____.



【答案】10

【解析】

试题解析：



作点P关于OA、OB的对称点M、N，连接MN，分别交OA、OB与Q、R，则Q、R，即为所求的点.此时$\triangle PQR$的周长最小.因为$\triangle PQR$的周长就是的MN长（两点之间线段最短）.

由图可知$\angle MOA=\angle POA$，$\angle MOB=\angle POB$，$\angle MON=2\left(\angle POA+\angle POB\right)=2\angle AOB=60°$，

$OM=OP=ON$，

所以$\triangle MON$是等边三角形.则$MN=10\text{cm}$，即$\triangle PQR$的周长最小是10cm.