专题 18 分式的基础

【重点突破】

知识点一 分式的基础

概念：一般地，如果 A，B 表示两个整数，并且 B 中含有字母，那么式子$\frac{A}{B}$叫做分式，A 为分子，B 为分母。

与分式有关的条件（考点）：

	要求	表示
分式有意义	分母≠0	
分式无意义	分母=0	
分式值为 0	分子为 0 且分母不为 0	$A=0,B\neq 0$
分式值为正或大于 0	分子分母同号	① A>0,B>0 ② A<0,B<0
分式值为负或小于 0	分子分母异号	①A>0,B<0 ②A<0,B>0
分式值为 1	分子分母值相等	A=B
分式值为-1	分子分母值互为相反数	A+B=0

知识点二 分式的基本性质（重点）

基本性质（基础）：分式的分子和分母同乘（或除以）一个不等于 0 的整式，分式的值不变。

字母表示：$\frac{A}{B}=\frac{A\cdot C}{B\cdot C}$，$\frac{A}{B}=\frac{A\div C}{B\div C}$，

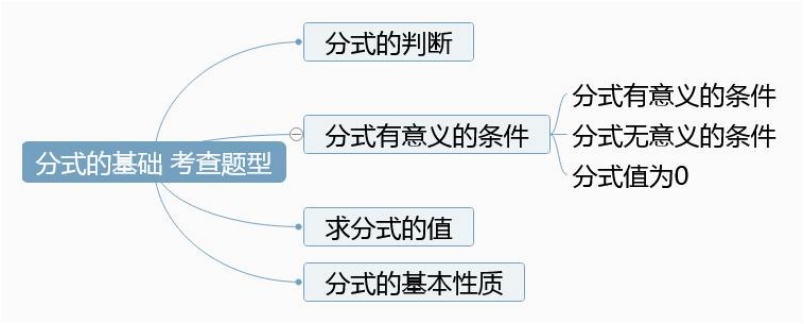
其中 A、B、C 是整式，C$\neq$0。

拓展：分式的符号法则：分式的分子、分母与分式本身的符号，改变其中任何两个，分式的值不变，即

$$\frac{A}{B}=\frac{-A}{-B}=-\frac{-A}{B}=-\frac{A}{-B}$$

注意：在应用分式的基本性质时，要注意 C$\neq$0 这个限制条件和隐含条件 B$\neq$0。

【考查题型】



考查题型一 分式的判断

典例 1.（2020·聊城市期中）下列各式中，$\frac{x}{\pi-2}$，$\frac{a}{2x-3}$，$\frac{a}{5b}$，$\frac{2}{x+y}$，$\frac{1}{3}x-y$，$\frac{3}{x+1}=\frac{1}{x-2}$，分式的个数为（　　）

A．2 个　　B．3 个　　C．4 个　　D．5 个

【答案】B

【分析】

根据分式的意义可以得到解答.

【详解】

解：分式是指分母中含有字母的代数式，根据这个定义，$\frac{a}{2x-3},\frac{a}{5b},\frac{2}{x+y}$是分式，

$\frac{x}{\pi-2}$中分母内的字母π表示一个常数，因此不是分式，

$\frac{1}{3}x-y=\frac{x-3y}{3}$中分母中没有字母，因此不是分式，

$\frac{3}{x+1}=\frac{1}{x-2}$是等式，不是分式，

故答案为 B.

变式 1-1.（2020·西安市期中）下列式子中，是分式的是（　　）

A．$\frac{1}{2-a}$　　B．$\frac{x}{\pi-3}$　　C．$-\frac{x}{3}$　　D．$\frac{x}{2}+y$

【答案】A

【提示】

利用分式定义可得答案.

【详解】

解：A、$\frac{1}{2-a}$的分母含字母，是分式，故此选项符合题意；

B、$\frac{x}{\pi-3}$的分母不含字母，不是分式，是整式，故此选项不合题意；

C、$-\frac{x}{3}$的分母不含字母，不是分式，是整式，故此选项不合题意；

D、$\frac{x}{2}+y$的分母不含字母，不是分式，是整式，故此选项不合题意；

故选：A.

【名师点拨】

本题考查分式的定义，熟练掌握分式的定义是解答本题的关键．判断分式的依据是看分母中是否含有字母，如果含有字母则是分式，如果不含有字母则不是分式．注意π不是字母，是常数，所以分母中含π的代数式不是分式，是整式．

变式 1-2．（2020·淄博市期中）在$\frac{1}{x}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{x^2+1}{x}$，$\frac{3xy}{\pi}$，$\frac{3}{x+y}$中，分式的数有（　　）

A．5 个　　B．4 个　　C．3 个　　D．2 个

【答案】C

【提示】

判断分式的依据是看分母中是否含有字母，如果含有字母则是分式，如果不含有字母则不是分式．

【详解】

解：在$\frac{1}{x}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{x^2+1}{x}$，$\frac{3xy}{\pi}$，$\frac{3}{x+y}$中，分式的有$\frac{1}{x}$，$\frac{x^2+1}{x}$，$\frac{3}{x+y}$，

故选 C．

【名师点拨】

本题主要考查了分式的定义，注意 π 不是字母，而是常数．

变式 1-3（2020·岳阳市期中）对于式子：①$\frac{1}{a}$；②$\frac{x}{2}$；③$\frac{x+y}{\pi}$；④$\frac{m^2}{2m}$；⑤$\frac{5}{x+y}$.其中是分式是

A．①②③④⑤　　B．①③④⑤　　C．①④⑤　　D．②③

【答案】C

【提示】

判断分式的依据是看分母中是否含有字母，如果含有字母则是分式，如果不含有字母则不是分式．

【详解】

解：①$\frac{1}{a}$；②$\frac{x}{2}$；③$\frac{x+y}{\pi}$；④$\frac{m^2}{2m}$；⑤$\frac{5}{x+y}$.中，

①$\frac{1}{a}$；④$\frac{m^2}{2m}$；⑤$\frac{5}{x+y}$.分母含有字母，是分式，

故选 C.

【名师点拨】

本题主要考查分式的定义．在解答此题时要注意分式是形式定义，只要是分母中含有未知数的式子即为分式.

考查题型二 分式有意义的条件、

类型一：分式有意义的条件

典例 2.（2020·合肥市期中）在函数 y=$\frac{\sqrt{x+2}}{x}$ 中，自变量 x 的取值范围是（　　）

A．$x\neq0$　　B．$x\geqslant-2$

C．$x>0$　　D．$x\geqslant-2$ 且 $x\neq0$

【答案】D

【提示】

根据分式的分母不能为 0、二次根式的被开方数的非负性即可得.

【详解】

由题意得：$x+2\geq0$ 且 $x\neq0$，

解得 $x\geq-2$ 且 $x\neq0$，

故选：D.

【名师点拨】

本题考查了求函数自变量的取值范围、分式和二次根式有意义的条件，掌握理解分式和二次根式的定义是解题关键.

变式 2-1.（2020·泰州市期中）下列分式中一定有意义的是（　）

A．$\frac{x+1}{x^2}$　　B．$\frac{x}{x^2-1}$　　C．$\frac{x-1}{x^2+1}$　　D．$\frac{x^2}{x+1}$

【答案】C

【提示】

根据分式有意义的条件是分母不等于零进行提示即可.

【详解】

A、当 $x=0$ 时，分式 $\frac{x+1}{x^2}$ 无意义，故此选项错误；

B、当 $x=\pm1$ 时，分式 $\frac{x}{x^2-1}$ 无意义，故此选项错误；

C、x为任何实数时，分式$\frac{x-1}{x^2+1}$一定有意义，故此选项正确；

D、当$x=-1$时，分式$\frac{x^2}{x+1}$无意义，故此选项错误；

故选：C.

【名师点拨】

本题主要考查了分式有意义的条件，关键是掌握分式有意义的条件是分母不等于零.

变式 2-2.（2020·乐山市期中）函数$y=\frac{1}{\sqrt{2-x}}$中，自变量x的取值范围是（　　）.

A．$x>2$　　B．$x\neq 2$　　C．$x<2$　　D．$x\neq 0$

【答案】C

【提示】

根据分式的性质，得$\sqrt{2-x}\neq 0$；根据二次根式的性质，得$2-x\geq 0$，从而得到自变量x的取值范围.

【详解】

结合题意，得：

$$\begin{cases}2-x\geq 0\\ \sqrt{2-x}\neq 0\end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases}x\leq 2\\ x\neq 2\end{cases}$$

$\therefore x<2$

故选：C.

变式 2-3.（2020·重庆市期中）若分式$\frac{x+2}{x-1}$有意义，则 x 的取值范围是（　　）

A．x≥1　　B．x≠1　　C．x≥﹣2　　D．x≠﹣2

【答案】B

【提示】

分式有意义时，分母不等于零，由此得到 x﹣1≠0，解该不等式即可.

【详解】

解：依题意得：x﹣1≠0，

解得 x≠1.

故选：B.

【名师点拨】

本题主要考查分式有意义的条件，掌握分式有意义的条件是解题的关键.

变式 2-4.（2019·衡水市期末）要使分式$\frac{x^2-4}{x+2}$有意义，则x的取值范围是（　　）

A．$x\neq -2$　　B．$x=2$　　C．$x=-2$　　D．$x\neq \pm 2$

【答案】A

【提示】

分式有意义的条件是分母不能为 0 即可.

【详解】

要使分式$\frac{x^2-4}{x+2}$有意义，

分母不为 0，即 x+2≠0,

∴x≠-2，

则x的取值范围是 x≠-2.

故选择：A.

【名师点拨】

本题考查分式有意义的条件问题，掌握分式有意义就是满足分母不为 0，会解不等式是关键.

类型二：分式无意义的条件

典例 3.（2020·洛阳市期中）x取下列何值时，分式$\frac{(x-2)^2}{x(x+2)}$无意义（　　）

A．2　　B．﹣2　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$-\frac{1}{2}$

【答案】B

【提示】

根据分式无意义的条件是分母等于零判断.

【详解】

A、当 *x*=2 时，*x*(*x*+2)≠0，分式有意义；

B、当 *x*=﹣2 时，*x*(*x*+2)=0，分式无意义；

C、当 *x*=$\frac{1}{2}$时，*x*(*x*+2)≠0，分式有意义；

D、当 *x*=﹣$\frac{1}{2}$时，*x*(*x*+2)≠0，分式有意义；

故选：*B*.

【名师点拨】

本题考查了分式有意义的条件，掌握分式无意义的条件是分母等于零是解题的关键.

变式 3-1.（2020·扬州市期末）若分式$\frac{x-2}{2x-3}$的值不存在，则x的值是(　　)

A．$x=2$　　B．$x=0$　　C．$x=\frac{2}{3}$　　D．$x=\frac{3}{2}$

【答案】D

【提示】

根据分式的值不存在，可得分式无意义，继而根据分式无意义时分母为 0 进行求解即可得.

【详解】

∵分式$\frac{x-2}{2x-3}$的值不存在，

∴分式$\frac{x-2}{2x-3}$无意义，

∴2x-3=0，

∴x=$\frac{3}{2}$，

故选 D.

【名师点拨】

本题考查了分式无意义的条件，弄清题意，熟练掌握分母为 0 时分式无意义是解题的关键.

变式 3-2.（2020·邢台市期末）若$x=-1$使某个分式无意义，则这个分式可以是（　　）

A．$\frac{x-1}{2x-1}$　　B．$\frac{2x+1}{x+1}$　　C．$\frac{2x-1}{x-1}$　　D．$\frac{x+1}{2x+1}$

【答案】B

【提示】

根据分式无意义的条件，对每个式子进行判断，即可得到答案.

【详解】

解：A、由$2x-1=0$，得$x=\frac{1}{2}$，故 A 不符合题意；

B、由$x+1=0$，得$x=-1$，故 B 符合题意；

C、由$x-1=0$，得$x=1$，故 C 不符合题意；

D、由$2x+1=0$，得$x=-\frac{1}{2}$，故 D 不符合题意；

故选：B.

【名师点拨】

本题考查了分式无意义的条件，解题的关键是掌握分式无意义的条件，即分母等于 0.

类型三：分式值为 0 的条件

典例 4.（2019·襄樊市期中）当$x=$_____时，分式$\frac{x}{x-2}$没有意义。（　）

A．0　　B．2　　C．-2　　D．± 2

【答案】B

【提示】

分式没有意义的条件是分母等于 0.

【详解】

当$x=2$时，$x-2=0$，分母为 0，分式没意义.

故选：B

【名师点拨】

本题主要考查分式没有意义的条件.

变式 4-1.（2019·哈尔滨市期末）若分式$\frac{x-3}{x+4}$的值为0，则x的值为（　　）

A．3　　B．-3　　C．4　　D．-4

【答案】A

【提示】

分式值为零的条件是分子等于零且分母不等于零，据此求解即可.

【详解】

解：∵分式$\frac{x-3}{x+4}$的值为 0，

∴x-3=0 且 x+4≠0.

解得：x=3.

故选：A.

【名师点拨】

本题主要考查的是分式值为零的条件，熟练掌握分式值为零的条件是解题的关键.

变式 4-2.（2020·无锡市期中）当分式$\frac{|x|-3}{x^2-6x+9}$的值为 0 时，则x等于（　　）

A．3　　B．0　　C．± 3　　D．-3

【答案】D

【提示】

先根据分式的值为 0 的条件列出关于 x 的不等式组，求出 x 的值即可．

【详解】

依题意得：$\begin{cases}|x|-3=0\\ x^2-6x+9\neq 0\end{cases}$，

解得 x＝−3．

故选：D

【名师点拨】

本题考查的是分式的值为 0 的条件，熟知分式值为零的条件是分子等于零且分母不等于零是解答此题的关键．

变式 4-3．（2020·南通市期中）若$\frac{x^2-9}{x+3}$分式的值为 0，则 x 的值为（　　）

A．4　　B．﹣4　　C．±3　　D．3

【答案】D

【提示】

利用分式值为 0 的条件可得$\begin{cases}x^2-9=0\\ x+3\neq 0\end{cases}$，求解即可得到答案．

【详解】

解：由题意可得$\begin{cases}x^2-9=0\\ x+3\neq 0\end{cases}$，解得$x=3$，

故选：D．

【名师点拨】

本题考查分式的值为 0 的条件，分式的值为 0 时，分子等于 0 且分母不为 0．

考查题型三 求分式的值

典例 5.（2020·聊城市期中）已知$\frac{b}{a}=3$，则$\frac{a-2b}{3b-a}$的值是（　　）

A．1　　B．$\frac{5}{8}$　　C．$-\frac{5}{8}$　　D．-1

【答案】C

【提示】

根据分式的性质求出$b=3a$，然后代入原式进行计算即可得解．

【详解】

$\because \frac{b}{a}=3$，

$\therefore b=3a$，

$\therefore \frac{a-2b}{3b-a}=\frac{a-2\times 3a}{3\times 3a-a}=\frac{-5a}{8a}=-\frac{5}{8}$.

故选：C.

【名师点拨】

本题主要考查了分式的求值，正确得出$b=3a$是解题的关键.

变式 5-1.（2020·诸暨市期中）已知代数式$\frac{6}{2x-1}$的值是一个整数，则整数x有（　　）

A．2 个　　B．3 个　　C．4 个　　D．无数个

【答案】C

【提示】

由x是整数，代数式$\frac{6}{2x-1}$的值是一个整数，可得$2x-1$是6的因数，从而可得答案.

【详解】

解：$\because x$是整数，代数式$\frac{6}{2x-1}$的值是一个整数，

$\therefore 2x-1$是6的因数，

$\therefore 2x-1=\pm 1$或$2x-1=\pm 2$或$2x-1=\pm 3$或$2x-1=\pm 6$

当$2x-1=\pm 1$，解得：$x=1$或$x=0$,

当$2x-1=\pm 2$，解得：$x=\frac{3}{2}$或$x=-\frac{1}{2}$，不合题意，舍去，

当$2x-1=\pm 3$，解得：$x=2$或$x=-1$，

当$2x-1=\pm 6$，解得：$x=\frac{7}{2}$或$x=-\frac{5}{2}$，不合题意，舍去，

综上：符合条件的x的值有4个.

故选：C.

【名师点拨】

本题考查的是代数式中分式的值，掌握分式的值是整数的特点是解题的关键.

变式 5-2.（2019·宁波市期中）已知$x^2-3x-4=0$，则分式$\frac{x}{x^2-x-4}$的值是（　）

A．2　　B．5　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{1}{3}$

【答案】C

【提示】

先对分式$\frac{x}{x^2-x-4}$进行变形得：$\frac{1}{x-\frac{4}{x}-1}$，然后由题意可进行求解.

【详解】

解：$\because x^2-3x-4=0$，

$\therefore x-\frac{4}{x}=3$，

$\therefore \frac{x}{x^2-x-4}=\frac{1}{x-\frac{4}{x}-1}=\frac{1}{3-1}=\frac{1}{2}$，

故选 C.

【名师点拨】

本题主要考查分式的化简求值，熟练掌握分式的运算是解题的关键.

变式 5-3.（2020·乐山市期末）若$\frac{a}{b}=2$，则$\frac{a^2-ab}{a^2-b^2}$的值为（　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $-\frac{1}{3}$　　D. $-\frac{2}{3}$

【答案】B

【提示】

根据已知条件得到$a=2b$，将其代入化简后的式子求值即可.

【详解】

解：因为$\frac{a}{b}=2$，得$a=2b$.

所以$\frac{a^2-ab}{a^2-b^2}=\frac{a(a-b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{a}{a+b}=\frac{2b}{2b+b}=\frac{2b}{3b}=\frac{2}{3}$.

故选：B.

【名师点拨】

本题主要考查了分式的化简求值，运用因式分解法正确将所给的分式分子、分母因式分解是解题的关键.

考查题型四 分式的基本性质

变式 6.（2020·黄冈市期末）下列等式成立的是（　　）

A. $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\frac{3}{a+b}$　　B. $\frac{ab}{ab-b^2}=\frac{a}{a-b}$

C. $\frac{2}{2a+b}=\frac{1}{a+b}$　　D. $\frac{a}{-a+b}=-\frac{a}{a+b}$

【答案】B

【解析】

A．$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\frac{b+2a}{ab}\neq\frac{3}{a+b}$，故 A 不成立；

B．$\frac{ab}{ab-b^2}=\frac{ab}{b(a-b)}=\frac{a}{a-b}$，故 B 成立；

C．$\frac{2}{2a+b}$ 不能约分，故 C 错误；

D．$\frac{a}{-a+b}=-\frac{a}{a-b}$，故 D 不成立．

故选 B．

变式 6-1．（2019·漯河市期末）若 x，y 的值均扩大为原来的 3 倍，则下列分式的值保持不变的是（　　）

A．$\frac{2+x}{x-y}$　　B．$\frac{2y}{x^2}$　　C．$\frac{2y^3}{3x^2}$　　D．$\frac{2y^2}{(x-y)^2}$

【答案】D

【分析】

根据分式的基本性质，x，y 的值均扩大为原来的 3 倍，求出每个式子的结果，看结果等于原式的即是答案．

【详解】

根据分式的基本性质，可知若 x，y 的值均扩大为原来的 3 倍，

A、$\frac{2+3x}{3x-3y}\neq\frac{2+x}{x-y}$，错误；

B、$\frac{6y}{9x^2}\neq\frac{2y}{x^2}$，错误；

C、$\frac{54y^3}{27x^2}\neq\frac{2y^3}{3x^2}$，错误；

D、$\frac{18y^2}{9(x-y)^2}=\frac{2y^2}{(x-y)^2}$，正确；

故选 D．

变式 6-2．（2020·岳阳市期中）根据分式的基本性质，分式 $\frac{-a}{a-b}$ 可变形为（　　）

A．$\frac{a}{-a-b}$　　B．$\frac{a}{a+b}$　　C．$-\frac{a}{a-b}$　　D．$-\frac{a}{a+b}$

【答案】C

【分析】

分式的恒等变形是依据分式的基本性质，分式的分子分母同时乘以或除以同一个非 0 的数或式子，分式的值不变．

【详解】

依题意得：$\frac{-a}{a-b}=-\frac{a}{a-b}$.

故选 C.

变式 6-3.（2019·东营市期末）下列运算错误的是

A. $\frac{(a-b)^2}{(b-a)^2}=1$　　B. $\frac{-a-b}{a+b}=-1$

C. $\frac{0.5a+b}{0.2a-0.3b}=\frac{5a+10b}{2a-3b}$　　D. $\frac{a-b}{a+b}=\frac{b-a}{b+a}$

【答案】D

【解析】

试题分析：根据分式的运算法则逐一计算作出判断：

A. $\frac{(a-b)^2}{(b-a)^2}=\frac{(a-b)^2}{(a-b)^2}=1$，计算正确；

B. $\frac{-a-b}{a+b}=-\frac{a+b}{a+b}=-1$，计算正确；

C. $\frac{0.5a+b}{0.2a-0.3b}=\frac{10(0.5a+b)}{10(0.2a-0.3b)}=\frac{5a+10b}{2a-3b}$，计算正确；

D. $\frac{a-b}{a+b}=\frac{-(b-a)}{b+a}=-\frac{b-a}{b+a}$，计算错误.

故选 D.

变式 6-4.（2019·合肥市期中）与分式$\frac{-a+b}{-a-b}$相等的是（　　）

A. $\frac{a+b}{a-b}$　　B. $\frac{a-b}{a+b}$　　C. $-\frac{a+b}{a-b}$　　D. $-\frac{a-b}{a+b}$

【答案】B

【解析】

试题解析：∵ $\frac{-a+b}{-a-b}=\frac{-(-a+b)}{-(-a-b)}=\frac{a-b}{a+b}$，

故选 B.

变式 6-5.（2020·南阳市期末）把分式$\frac{\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}}$的分子与分母各项系数化为整数,得到的正确结果是（　　）

A. $\frac{3x+2}{4x-3}$　　B. $\frac{4x+2}{6x-3}$　　C. $\frac{2x+1}{2x-1}$　　D. $\frac{4x+1}{6x-3}$

【答案】B

【详解】

解: 不改变分值, 如果把其分子和分母中的各项的系数都化为整数,则分子分母要同时乘以 12, 即分式

$$\frac{\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}}=\frac{4x+2}{6x-3}$$

故选 B.