专题 20 分式方程

【重点突破】

知识点一 分式方程

解分式方程的基本

1）去分母(两边同乘最简公分母，约去分母，化成整式方程)。

2）解整式方程(去括号-移项/合并同类项-系数化为 1)。

3）检验(把整式方程的解代入最简公分母，

若最简公分母为 0 ，则 x=a 不是分式方程的解

若最简公分母不为 0，则 x=a 是分式方程的解

4）写出答案

增根的概念：在分式方程化为整式方程的过程时，若整式方程的根使最简公分母为 0（即根使整式方程成立，但分式方程中分母为 0 ），那么这个根叫做原分式方程的增根。

知识点二 利用分式方程解决实际问题

分式方程解决实际问题的步骤：

1. 根据题意找等量关系
2. 设未知数
3. 列出方程
4. 解方程，并验根（对解分式方程尤为重要）
5. 写答案

【考查题型】

考查题型一 分式方程的定义

典例 1.（2020·无锡市第一女子中学初二期中）下列关于 x 的方程中，是分式方程的是(　　).

A．$3x=\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{x}=2$

C．$\frac{x+2}{5}=\frac{3+x}{4}$　　D．3x－2y＝1

【答案】B

【提示】

根据分式方程的定义：分母里含有字母的方程叫做分式方程判断.

【详解】

A. C. *D* 项中的方程分母中不含未知数，故不是分式方程；

B. 方程分母中含未知数 *x*，故是分式方程，

故选 B.

【名师点拨】

本题考查的是分式方程，熟练掌握分式方程是解题的关键.

变式 1-1.（2020·兴安盟期末）下列关于 x 的方程是分式方程的是（　　）

A. $\frac{x+2}{5}-3=\frac{3+x}{6}$；B. $\frac{x-1}{7+a}=3-x$；　C. $\frac{x}{a}-\frac{a}{b}=\frac{b}{a}-\frac{x}{b}$；　D. $\frac{(x-1)^2}{x-1}=1$

【答案】D

【解析】

根据分式方程的定义——分母中含有未知数的方程.故选 D.

变式 1-3.（2020·锡林郭勒市期末）下列方程是分式方程的是（　　）

A. $\frac{1}{2}-\frac{x}{3}=0$　　B. $\frac{4}{x}=-2$　　C. $x^2-1=3$　　D. $2x+1=3x$

【答案】B

【解析】

A 选项是一元一次方程；

B 选项的方程的分母中含有未知数，所以为分式方程；

C 选项是一元二次方程；

D 选项是一元一次方程.

故选 B.

考查题型二 解分式方程

典例 2.（2020·衡水市期末）解分式方程 $\frac{2}{x-1}+\frac{x+2}{1-x}=3$ 时，去分母后变形为

A. $2+(x+2)=3(x-1)$　　B. $2-x+2=3(x-1)$

C. $2-(x+2)=3(1-x)$　　D. $2-(x+2)=3(x-1)$

【答案】D

【解析】

试题提示：方程$\frac{2}{x-1}+\frac{x+2}{1-x}=3$，两边都乘以 x-1 去分母后得：2-（x+2）=3（x-1），故选 D.

变式 2-1.（2018·安阳市期末）方程$\frac{1}{2x}=\frac{2}{x+3}$的解为（　　）

A．x=﹣1　　B．x=0　　C．x=$\frac{3}{5}$　　D．x=1

【答案】D

【解析】

提示：分式方程去分母转化为整式方程，求出整式方程的解得到 x 的值，经检验即可得到分式方程的解.

详解：去分母得：x+3=4x，

解得：x=1，

经检验 x=1 是分式方程的解，

故选 D.

名师点拨：此题考查了解分式方程，利用了转化的思想，解分式方程注意要检验.

变式 2-2.（2019·文登区期中）若分式方程$\frac{1}{x-3}+1=\frac{a-x}{x-3}$有增根，则 a 的值是(　　)

A．4　　B．0 或 4　　C．0　　D．0 或﹣4

【答案】A

【解析】

试题解析：方程两边同时乘以 x-3 得，1+x-3=a-x，

∵方程有增根，

∴x-3=0，解得 x=3.

∴1+3-3=a-3，解得 a=4.

故选 A.

变式 2-3.（2020·余杭区期中）解分式方程$\frac{1}{x-1}$+1=0，正确的结果是（ ）

A．x=0　　B．x=1　　C．x=2　　D．无解

【答案】A

【提示】

先去分母化为整式方程,再求解即可.

【详解】

$\frac{1}{x-1}$+1=0，

1+x-1=0，

x=0，

经检验：x=0 是原方程的根，

故选 A.

考查题型三 分式方程的解

典例 3.（2020·成都市期末）已知关于 x 的分式方程$\frac{m-2}{x+1}$=1 的解是负数，则 m 的取值范围是（　　）

A．m≤3　　B．m≤3 且 m≠2　　C．m＜3　　D．m＜3 且 m≠2

【答案】D

【提示】

解方程得到方程的解，再根据解为负数得到关于 m 的不等式结合分式的分母不为零，即可求得 m 的取值范围.

【详解】

$\frac{m-2}{x+1}$=1，

解得：x=m﹣3，

∵关于 x 的分式方程$\frac{m-2}{x+1}$=1 的解是负数，

∴m﹣3＜0，

解得：m＜3，

当 x=m﹣3=﹣1 时，方程无解，

则 m≠2，

故 m 的取值范围是：m＜3 且 m≠2，

故选 D.

【名师点拨】

本题考查了分式方程的解，熟练掌握分式方程的解法以及分式方程的分母不为零是解题关键.

变式 3-1.（2020·西安市期中）若关于 x 的方程$\frac{x+m}{x-3}+\frac{3m}{3-x}$=3 的解为正数，则 m 的取值范围是（ ）

A．m＜$\frac{9}{2}$　　B．m＜$\frac{9}{2}$且 m≠$\frac{3}{2}$

C．m＞﹣$\frac{9}{4}$　　D．m＞﹣$\frac{9}{4}$且 m≠﹣$\frac{3}{4}$

【答案】B

【详解】

解：去分母得：x+m﹣3m=3x﹣9，

整理得：2x=﹣2m+9，解得：x=$\frac{-2m+9}{2}$，

已知关于 x 的方程$\frac{x+m}{x-3}+\frac{3m}{3-x}$=3 的解为正数，

所以﹣2m+9＞0，解得 m＜$\frac{9}{2}$，

当 x=3 时，x=$\frac{-2m+9}{2}$=3，解得：m=$\frac{3}{2}$　　，

所以 m 的取值范围是：m＜$\frac{9}{2}$且 m≠$\frac{3}{2}$.

故答案选 B.

变式 3-2.（2020·兰州市期末）若关于 x 的方程$\frac{m-1}{x-1}-\frac{x}{x-1}$=0 有增根，则 m 的值是

A．3　　B．2　　C．1　　D．－1

【答案】B

【解析】

试题提示：若关于 x 的方程$\frac{m-1}{x-1}-\frac{x}{x-1}$=0 有增根，则 x=1 为增根.

把方程去分母可得 m-1-x=0，把 x=1 代入可得 m-1-1=0，解得 m=2.

变式 3-3.（2020·贵阳市期末）若$\frac{m}{x-4}-\frac{1-x}{4-x}=0$无解，则 m 的值是（）

A．－2　　B．2　　C．3　　D．－3

【答案】C

【解析】

试题解析：方程两边都乘（x-4）得：

m+1-x=0，

∵方程无解，

∴x-4=0，

即 x=4，

∴m+1-4=0，

即 m=3，

故选 C.

名师点拨：增根问题可按如下步骤进行：①让最简公分母为 0 确定增根；②化分式方程为整式方程；③把

增根代入整式方程即可求得相关字母的值.

考查题型四 分式方程的实际应用

典例 4.（2019·南宁市期末）在我市某一城市美化工程招标时，有甲、乙两个工程队投标，经测算：甲队单独完成这项工程需要 60 天，若由甲队先做 20 天，剩下的工程由甲、乙合作 24 天可完成.

（1）乙队单独完成这项工程需要多少天？

（2）甲队施工一天，需付工程款 3.5 万元，乙队施工一天需付工程款 2 万元. 若该工程计划在 70 天内完成，在不超过计划天数的前提下，是由甲队或乙队单独完成工程省钱？还是由甲乙两队全程合作完成该工程省钱？

【答案】（1）乙队单独完成需 90 天；（2）在不超过计划天数的前提下，由甲、乙合作完成最省钱.

【提示】

（1）求的是乙的工效，工作时间明显. 一定是根据工作总量来列等量关系. 等量关系为：甲 20 天的工作量+甲乙合作 24 天的工作总量=1.

（2）根据题意，分别求出三种情况的费用，然后把在工期内的情况进行比较即可.

【详解】

解：（1）设乙队单独完成需 x 天.

根据题意，得：$\frac{1}{60}\times 20+(\frac{1}{x}+\frac{1}{60})\times 24=1$.

解这个方程得：x=90.

经检验，x=90 是原方程的解.

∴乙队单独完成需 90 天.

（2）设甲、乙合作完成需 y 天，则有 $(\frac{1}{60}+\frac{1}{90})\times y=1$，

解得，y=36；

①甲单独完成需付工程款为：60×3.5=210（万元）.

②乙单独完成超过计划天数不符题意，

③甲、乙合作完成需付工程款为：36×（3.5+2）=198（万元）.

答：在不超过计划天数的前提下，由甲、乙合作完成最省钱.

【名师点拨】

本题考查分式方程的应用，提示题意，找到关键描述语，找到合适的等量关系是解决问题的关键.

变式 4-1.（2019·天水市期末）我市从 2018 年 1 月 1 日开始，禁止燃油助力车上路，于是电动自 行车的市场需求量日渐增多. 某商店计划最多投入 8 万元购进 A、B 两种型号的 电动自行车共 30 辆，其中每辆 B 型电动自行车比每辆 A 型电动自行车多 500 元. 用 5 万元购进的 A 型电动自行车与用 6 万元购

进的 B 型电动自行车数量一 样.

（1）求 A、B 两种型号电动自行车的进货单价；

（2）若 A 型电动自行车每辆售价为 2800 元，B 型电动自行车每辆售价为 3500 元，设该商店计划购进 A 型电动自行车 m 辆，两种型号的电动自行车全部销售 后可获利润 y 元．写出 y 与 m 之间的函数关系式；

（3）该商店如何进货才能获得最大利润；此时最大利润是多少元.

【答案】（1）A、B 两种型号电动自行车的进货单价分别为 2500 元 3000 元；（2）y=﹣200m+15000（20≤m≤30）；（3）m=20 时，y 有最大值，最大值为 11000 元.

【提示】

（1）设 A、B 两种型号电动自行车的进货单价分别为 x 元、（x+500）元，根据用 5 万元购进的 A 型电动自行车与用 6 万元购进的 B 型电动自行车数量一 样，列分式方程即可解决问题；

（2）根据总利润=A 型的利润+B 型的利润，列出函数关系式即可；

（3）利用一次函数的性质即可解决问题.

【详解】

解：（1）设 A、B 两种型号电动自行车的进货单价分别为 x 元、（x+500） 元，

由题意：$\frac{50000}{x}=\frac{60000}{x+500}$，

解得：x=2500，

经检验：x=2500 是分式方程的解，

答：A、B 两种型号电动自行车的进货单价分别为 2500 元 3000 元；

（2）y=300m+500（30﹣m）=﹣200m+15000（20≤m≤30）；

（3）∵y=300m+500（30﹣m）=﹣200m+15000，

∵﹣200＜0，20≤m≤30，

∴m=20 时，y 有最大值，最大值为 11000 元.

【名师点拨】

本题考查了分式方程的应用，一次函数的应用等知识，读懂题意，找准等量关系列出方程，找准数量关系列出函数关系是解题的关键.

变式 4-2.（2020·九江市期末）某公司购买了一批 A、B 型芯片，其中 A 型芯片的单价比 B 型芯片的单价少 9 元，已知该公司用 3120 元购买 A 型芯片的条数与用 4200 元购买 B 型芯片的条数相等.

（1）求该公司购买的 A、B 型芯片的单价各是多少元？

（2）若两种芯片共购买了 200 条，且购买的总费用为 6280 元，求购买了多少条 A 型芯片？

【答案】（1）A 型芯片的单价为 26 元/条，B 型芯片的单价为 35 元/条；（2）80.

【提示】

（1）设 B 型芯片的单价为 x 元/条，则 A 型芯片的单价为（x - 9）元/条，根据数量=总价÷单价结合用 3120 元购买 A 型芯片的条数与用 4200 元购买 B 型芯片的条数相等，即可得出关于 x 的分式方程，解之经检验后即可得出结论；

（2）设购买 a 条 A 型芯片，则购买（200 - a）条 B 型芯片，根据总价=单价×数量，即可得出关于 a 的一元一次方程，解之即可得出结论.

【详解】

（1）设 B 型芯片的单价为 x 元/条，则 A 型芯片的单价为（x - 9）元/条，根据题意得：

$$\frac{3120}{x-9}=\frac{4200}{x},$$

解得：x=35，

经检验，x=35 是原方程的解，

∴x - 9=26.

答：A 型芯片的单价为 26 元/条，B 型芯片的单价为 35 元/条.

（2）设购买 a 条 A 型芯片，则购买（200 - a）条 B 型芯片，根据题意得：

26a+35（200 - a）=6280，

解得：a=80.

答：购买了 80 条 A 型芯片.

【名师点拨】

本题考查了分式方程的应用以及一元一次方程的应用，解题的关键是：（1）找准等量关系，正确列出分式方程；（2）找准等量关系，正确列出一元一次方程.

变式 4-3.（2019 阳泉市期末）甲、乙两个工程队均参与某筑路工程，先由甲队筑路 60 公里，再由乙队完成剩下的筑路工程，已知乙队筑路总公里数是甲队筑路总公里数的 $\frac{4}{3}$ 倍，甲队比乙队多筑路 20 天.

（1）求乙队筑路的总公里数；

（2）若甲、乙两队平均每天筑路公里数之比为 5：8，求乙队平均每天筑路多少公里.

【答案】（1）80；（2）0. 8.

【解析】

试题提示：（1）根据乙队筑路总千米数是甲队筑路总千米数的 $\frac{4}{3}$ 倍列式计算即可得；

（2）设甲队平均每天筑路 5x 千米，则乙队平均每天筑路 8x 千米，根据题意可得等量关系：甲队筑路用的

天数-20=乙队筑路用的天数，列出方程解方程即可．

试题解析：(1)60×$\frac{4}{3}$ ＝80(千米)，即乙队筑路的总千米数为 80 千米．

(2)设甲队平均每天筑路 5x 千米，则乙队平均每天筑路 8x 千米，

根据题意，得$\frac{60}{5x}-20=\frac{80}{8x}$，

解得 $x=\frac{1}{10}$，

经检验，$x=\frac{1}{10}$是原分式方程的解且符合题意，

$\frac{1}{10}\times8=\frac{4}{5}$，

答：乙队平均每天筑路$\frac{4}{5}$千米．

【名师点拨】本题考查了分式方程的应用，关键是弄懂题意，找出题中的数量关系，根据数量关系确定等量关系．

变式 4-4．（2020·佳木斯市期末）为支援灾区，某校爱心活动小组准备用筹集的资金购买 A、B 两种型号的学习用品共 1000 件．已知 B 型学习用品的单价比 A 型学习用品的单价多 10 元，用 180 元购买 B 型学习用品的件数与用 120 元购买 A 型学习用品的件数相同．

（1）求 A、B 两种学习用品的单价各是多少元？

（2）若购买这批学习用品的费用不超过 28000 元，则最多购买 B 型学习用品多少件？

【答案】（1）A 型学习用品 20 元，B 型学习用品 30 元；（2）800．

【解析】

（1）设 A 种学习用品的单价是 x 元，根据题意，得

$\frac{180}{x+10}=\frac{120}{x}$，解得 $x=20$．经检验，$x=20$ 是原方程的解．所以 $x+10=30$．

答：A、B 两种学习用品的单价分别是 20 元和 30 元．

（2）设购买 B 型学习用品 m 件，根据题意，得

$30m+20(1000-m)\leq28000$，解得 $m\leq800$．所以，最多购买 B 型学习用品 800 件．