周练二

一、选择

比较大小

1 设$a=0.5^{0.5}$，$b=\log_{2019}2020$，$c=\log_9 3$，则a，b，c的大小关系是（　）．

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$　　C. $c<a<b$　　D. $c<b<a$

答案　C

解析　$a=0.5^{0.5}>0.5^1=\frac{1}{2}$，又$a=0.5^{0.5}<0.5^0=1$，

$\therefore\frac{1}{2}<a<1$，$b=\log_{2019}2020>\log_{2019}2019=1$，

$\therefore b>1$，

而$c=\log_9 3=\log_{3^2}3=\frac{1}{2}\log_3 3=\frac{1}{2}$，

所以$c=\frac{1}{2}<a<1<b$，即$c<a<b$．

故选C．

分段函数

2 已知$f(x)=\begin{cases}2^x\ (x\leqslant 0)\\ \log_2 x\ (x>0)\end{cases}$，若$f(a)+f(1)=\frac{1}{2}$，则$a=$（　）．

A. 1　　B. -1

C. $\sqrt{2}$或1　　D. $\sqrt{2}$或-1

答案　D

解析　由函数$f(x)=\begin{cases}2^x, x\leqslant 0\\ \log_2 x, x>0\end{cases}$，

$\therefore f(1)=\log_2 1=0$，

$\therefore f(a)=\frac{1}{2}$，

当$a>0$时，$f(a)=\log_2 a=\frac{1}{2}$，解得$a=\sqrt{2}$；

当$a\leqslant 0$时，$f(a)=2^a=\frac{1}{2}$，解得$a=-1$．

综上，$a=\sqrt{2}$或-1．

故选D．

过定点

3 当$a>0$，且$a\neq 1$时，$f(x)=\log_a(x+2)+a^{x+1}+2$的图象恒过定点$P$，则点$P$坐标为（　）．

A. $(-2,4)$　　B. $(-1,4)$

C. $(-2,3)$　　D. $(-1,3)$

答案 D

解析 由题设可知：

当$a>0$且$a\neq 1$时，函数$f(x)=\log_a(x-2)+a^{x+1}+2$过定点$P$，

则说明无论a如何变化，

其函数值均不发生变化，

即$\begin{cases}x+2=1\\x+1=0\end{cases}$，解得$x=-1$，又由$f(-1)=3$，

即函数$f(x)=\log_a(x+2)+a^{x+1}+2$（$a>0$且$a\neq 1$）均过定点$P(-1,3)$．

故选D．

对数运算

4 已知$ab>0$，有下列四个等式：①$\lg(ab)=\lg a+\lg b$；②$\lg\left(\frac{a}{b}\right)=\lg a-\lg b$；③$\frac{1}{2}\lg\left(\frac{a}{b}\right)^2=\lg\left(\frac{a}{b}\right)$；④$\lg(ab)=\frac{1}{\log_{(ab)}10}$．其中正确的是（　）．

A. ①②③④　　B. ①②　　C. ③④　　D. ③

答案 D

解析 已知$ab>0$，则$a>0$，$b>0$或$a<0$，$b<0$，

故$\lg(a\cdot b)=\lg a+\lg b$，当$a<0$，$b<0$时不成立，所以①错误；

$\lg\left(\frac{a}{b}\right)=\lg a-\lg b$当$a<0$，$b<0$时也不成立，所以②错误；

$\frac{1}{2}\lg\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{1}{2}\times 2\times\lg\left(\frac{a}{b}\right)=\lg\left(\frac{a}{b}\right)$，所以③正确；

$\lg(ab)=\frac{\log_{(ab)}(ab)}{\log_{(ab)}10}=\frac{1}{\log_{(ab)}10}$，

当$ab=1$时不成，故④错误．

综上所述，答案选D．

5 已知函数$f(x)=\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)+\frac{x+1}{x}$，则$f\left(\ln\frac{1}{e^x}\right)+f\left(10^{\lg x}\right)=$（　）．

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

答案 D

解析 函数$f(x)=\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)+\frac{x+1}{x}$，

$\therefore\ f\left(\ln\frac{1}{e^x}\right)+f\left(10^{\lg x}\right)$

$=f(-x)+f(x)$

$=\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)+\frac{-x+1}{-x}+\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)+\frac{x+1}{x}$

$=\ln\left[\ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2-x^2\right]+\frac{x+1}{x}-\frac{1-x}{x}$

$=2$．

故选D．

6 若$3^a=5^b=225$，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=$（　）．

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. 1　　D. 2

答案 A

解析 $\because 3^a=5^b=225$，

则$a=\log_3 225$

$=2+\log_3 25$

$=2+2\times\dfrac{\lg 5}{\lg 3}$

$=\dfrac{2(\lg 5+\lg 3)}{\lg 3}$.

$b=\log_5 225$

$=2+\log_5 9$

$=2+2\times\left(\dfrac{\lg 3}{\lg 5}\right)$

$=\dfrac{2(\lg 5+\lg 3)}{\lg 5}$.

所以$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{(\lg 3+\lg 5)}{2(\lg 5+\lg 3)}=\dfrac{1}{2}$.

故选A .

7 若函数$f(x)=\log_9(9^x+1)-\dfrac{x}{2}$，则使不等式$f(x)-m\leqslant 0$有解时，实数$m$的最小值为（　）.

A. 0

B. $-\log_3 2$

C. $\log_3 2$

D. $\log_3\sqrt{2}$

答案 D

解析 $f(x)=\log_9(9^x+1)-\dfrac{x}{2}=\log_9\dfrac{9^x+1}{3^x}=\log_9\left(3^x+\dfrac{1}{3^x}\right)$，

$\because f(x)-m\leqslant 0$有解，

$\therefore m\geqslant f(x)_{\min}$，

又$\because f(x)=\log_9\left(3^x+\dfrac{1}{3^x}\right)\geqslant\log_9 2=\log_3\sqrt{2}$，

$\therefore f(x)_{\min}=\log_3\sqrt{2}$，

$m\geqslant\log_3\sqrt{2}$，

$\therefore$实数m的最小值为$\log_3\sqrt{2}$，

故选D .

二、填空

奇偶性

8 若函数$f\left(x\right)=\dfrac{m-2^{x}}{n+2^{x+1}}$是奇函数，则实数$m+n=$______ .

答案 ±3

解析 $\because f\left(x\right)=\dfrac{m-2^{x}}{n+2^{x+1}}$是奇函数，

$\therefore -f\left(x\right)=f\left(-x\right)$，

$\dfrac{2^{x}-m}{n+2^{x+1}}=\dfrac{m-2^{-x}}{n+2^{-x+1}}$，

$\therefore \left(2^{x}-m\right)\left(n+2^{-x+1}\right)=\left(m-2^{-x}\right)\left(n+2^{x+1}\right)$，

化简得：$\left(2^{x+1}+2^{-x+1}\right)m-\left(2^{x}+2^{-x}\right)n+2mn-4=0$，

$\left(2^{x}+2^{-x}\right)\left(2m-n\right)+2mn-4=0$，

则$\begin{cases}2m-n=0\\2mn-4=0\end{cases}$，

解得$\begin{cases}m=1\\n=2\end{cases}$或$\begin{cases}m=-1\\n=-2\end{cases}$，

$\therefore m+n=\pm3$.

三、解答

9 计算：

（1）$(0.16)^{-\frac{1}{2}}-3^{-3}-(-3)^{0}-\left(2\dfrac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}-\sqrt{(1-\sqrt{3})^{2}}$.

（2）若$x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}=0$，计算$\dfrac{x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}-3}{x^{2}+x^{-2}-4}$的值 .

答案 （1）$\dfrac{13}{6}-\sqrt{3}$.

（2）$\dfrac{1}{2}$.

解析 （1）原式$=(0.16)^{-\frac{1}{2}}-3^{-3}-(-3)^{0}-\left(2\dfrac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}-\sqrt{(1-\sqrt{3})^{2}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{0.16}}-\frac{1}{3^{3}}-1-\left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}-|1-\sqrt{3}|$$
$$=\frac{1}{0.4}-\frac{1}{27}-1-\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^{3}}}-(\sqrt{3}-1)$$
$$=\frac{5}{2}-\frac{1}{27}-1-\frac{8}{27}-(\sqrt{3}-1)$$

$=\dfrac{13}{6}-\sqrt{3}$.

（2）$\because x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=2$，

$\therefore(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2=x+x^{-1}+2=4$，

$\therefore x+x^{-1}=2$，

$\therefore(x+x^{-1})^2=x^2+x^{-2}+2=4$，

$\therefore x^2+x^{-2}=2$，

又$(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^3=x^{\frac{3}{2}}+3\cdot(x^{\frac{1}{2}})^2\cdot x^{-\frac{1}{2}}+3\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot(x^{-\frac{1}{2}})^2+x^{-\frac{3}{2}}$

$=x^{\frac{3}{2}}+3\cdot x^{\frac{1}{2}}+3\cdot x^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}+6$，

$\therefore 2^3=x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}+6$，

$\therefore x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=2$，

$\therefore\dfrac{x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}-3}{x^2+x^{-2}-4}=\dfrac{2-3}{2-4}=\dfrac{1}{2}$.

10 已知定义域为$\mathbf{R}$的函数$f(x)=\dfrac{b-2^x}{2^{x+1}+a}$是奇函数．

（1）求实数a，b的值．

（2）判断$f(x)$的单调性并证明．

（3）若$f(k\cdot 3^x)+f(3^x-9^x+2)>0$对任意的$x\in[1,+\infty)$恒成立，求实数$k$的取值范围．

答案 （1）$a=2$，$b=1$．

（2）$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$是减函数，证明见解析．

（3）$k<\dfrac{4}{3}$.

解析 （1）$\begin{cases}f(0)=0\\f(-1)=-f(1)\end{cases}\Rightarrow f(x)=\dfrac{1-2^x}{2^{x+1}+2}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$.

经检验，对$\forall x\in\mathbf{R}$都有$f(-x)+f(x)=0$成立．

（2）设$\forall x_1$，$x_2\in\mathbf{R}$且$x_1<x_2$，

则$f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{2^{x_2}-2^{x_1}}{(1+2^{x_1})(1+2^{x_2})}$，

$\because x_1<x_2$，且$y=2^x$在$\mathbf{R}$上单增，

$\therefore f(x_1)>f(x_2)$，

$\therefore f(x)$在$(-\infty,+\infty)$是减函数．

（3）$f(k3^x)>f(3^x-9^x+2)=f(-3^x+9^x-2)$，结合（2）的结论，

$\therefore k3^x < -3^x + 9^x - 2$对任意的$x \in [1, +\infty)$恒成立，

$\therefore k < 3^x - \dfrac{2}{3^x} - 1$对任意$x \geqslant 1$恒成立，设$t = 3^x$，$t \in [3, +\infty)$，

易得$y = t - \dfrac{2}{t} - 1$在$[3, +\infty)$上单增，

$\therefore t = 3$时，$y_{\min} = \dfrac{4}{3}$,

$\therefore k < \dfrac{4}{3}$．

11 已知函数$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1 - ax}{x - 1}$的图象关于原点对称，其中$a$为常数．

（1）求a的值．

（2）当$x \in (1, +\infty)$时，$f(x) + \log_{\frac{1}{2}}(x - 1) < m$恒成立，求实数$m$的取值范围．

（3）若关于x的方程$f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x + k)$在$[2, 3]$上有解，求$k$的取值范围．

答案 （1）$a = -1$．

（2）$m \geqslant -1$．

（3）$k \in [-1, 1]$．

解析 （1）$\because$函数$f(x)$的图象关于原点对称，

$\therefore f(-x) = -f(x)$，

即$\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1 + ax}{-x - 1} = -\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1 - ax}{x - 1} = \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{x - 1}{1 - ax}$，

解得$a = -1$或$a = 1$（舍），

故$a = -1$．

（2）$f(x) + \log_{\frac{1}{2}}(x - 1) = \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1 + x}{1 - x} + \log_{\frac{1}{2}}(x - 1) = \log_{\frac{1}{2}}(1 + x)$，

$x > 1$时，$\log_{\frac{1}{2}}(1 + x) < -1$，

$\because x > 1$时，$f(x) + \log_{\frac{1}{2}}(x - 1) < m$恒成立，

$\therefore m \geqslant -1$．

（3）由（1）得$f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x + k)$，

即$\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{x + 1}{x - 1} = \log_{\frac{1}{2}}(x + k)$，

即$\dfrac{x + 1}{x - 1} = x + k$得$k = \dfrac{2}{x - 1} - x + 1$在$[2, 3]$上有解，

$g(x) = \dfrac{2}{x - 1} - x + 1$在$[2, 3]$上递减，

故$g(x)$的值域是$[-1, 1]$，

$\therefore k \in [-1,1]$.