第 03 天　二次函数的图象和性质

中考频度：★★★★☆　　难易程度：★★☆☆☆

1．下列函数是 y 关于 x 的二次函数的是

A．$y=-x$　　B．$y=2x+3$

C．$y=x^2-3$　　D．$y=\dfrac{1}{x^2+1}$

2．抛物线 $y=(x-1)^2+2$ 的对称轴是

A．直线 $x=-1$　　B．直线 $x=1$

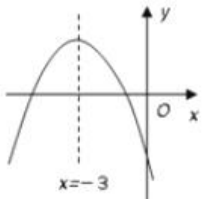
C．直线 $x=-2$　　D．直线 $x=2$

3．将抛物线 $y=2x^2$ 向下平移 1 个单位，得到的抛物线是

A．$y=2(x+1)^2$　　B．$y=2(x-1)^2$

C．$y=2x^2+1$　　D．$y=2x^2-1$

4．二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，若点 A（1，y_1）、B（2，y_2）是它图象上的两点，则 y_1 与 y_2 的大小关系是



A．$y_1<y_2$　　B．$y_1=y_2$

C．$y_1>y_2$　　D．不能确定

5．抛物线 $y=2x^2+1$ 的顶点坐标是

A．（2，1）　　B．（0，1）

C．（1，0）　　D．（1，2）

6．已知抛物线 $y=（m+1）x^2+2$ 的顶点是此抛物线的最高点，那么 m 的取值范围是

A．$m\neq0$　　B．$m\neq-1$

C．$m>-1$　　D．$m<-1$

7．已知 $y=x（x+5-a）+2$ 是关于 x 的二次函数，当 x 的取值范围在 $1\leq x\leq4$ 时，y 在 $x=1$ 时取得最大值，则实

数 a 的取值范围是

A．$a=10$　　B．$a=4$

C．$a\geq 9$　　D．$a\geq 10$

8．若二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的 x 与 y 的部分对应值如下表：

x	…	–1	0	1	2	3	…
y	…	$\frac{7}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{9}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$\frac{7}{4}$	…

则下列说法错误的是

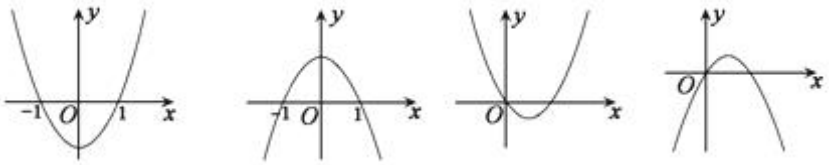
A．二次函数图象与 x 轴交点有两个

B．$x\geq 2$ 时 y 随 x 的增大而增大

C．二次函数图象与 x 轴交点横坐标一个在–1~0 之间，另一个在 2~3 之间

D．对称轴为直线 $x=1.5$

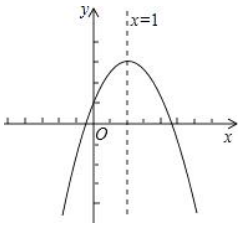
9．已知 $b>0$ 时，二次函数 $y=ax^2+bx+a^2-1$ 的图象如下列四个图之一所示．根据图象分析，a 的值等于



A．–2　　B．–1

C．1　　D．2

10．已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）的图象如图所示，有下列 4 个结论：①$abc>0$；②$b<a+c$；③$4ac-b^2>0$；④$2a+b=0$，其中正确的结论有



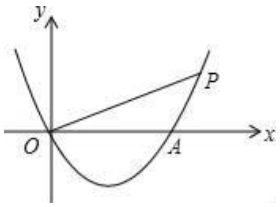
A．1 个　　B．2 个

C．3 个　　D．4 个

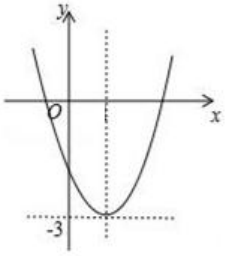
11．一条抛物线的顶点是 A（2，1），且经过点 B（1，0），则该抛物线的函数表达式是_____.

12．已知抛物线 $y=ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）与 x 轴交于 A，B 两点，若点 A 的坐标为（−1，0），抛物线的对称轴为直线 $x=2$，则线段 AB 的长为_____．学_科网

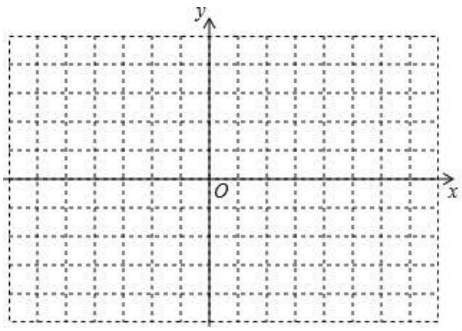
13．如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2-x$ 与 x 轴交于点 A，点 P 在抛物线上，连接 AP．若△OAP 是以 OA 为底边的等腰三角形，则△OAP 的面积是_____．



14．已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）的图象如图，且关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c-m=0$ 没有实数根，有下列结论：①$b^2-4ac>0$；②$abc<0$；③$m<-3$；④$3a+b>0$．其中，正确结论的个数是_____个．



15．求二次函数 $y=x^2-4x+3$ 的顶点坐标，并在所给坐标系中画出它的图象．



16．已知抛物线的对称轴是 y 轴，顶点坐标是（0，2），且经过点（1，3），求此抛物线的解析式．

17．已知抛物线 $y=x^2+bx-3$（b 是常数）经过点 A（−1，0）．

（1）求该抛物线的解析式和顶点坐标；

（2）P（m，t）为抛物线上的一个动点，P 关于原点的对称点为 P'．

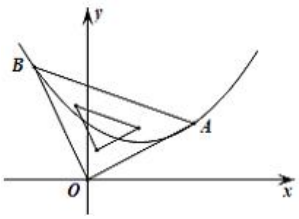
①当点 P'落在该抛物线上时，求 m 的值；

②当点 P'落在第二象限内，$P'A^2$ 取得最小值时，求 m 的值．

18．如图，二次函数的图象的顶点坐标为（1，$\frac{2}{3}$），现将等腰直角三角板的直角顶点放在原点 O，一个锐角顶点 A 在此二次函数的图象上，而另一个锐角顶点 B 在第二象限，且点 A 的坐标为（2，1）．

（1）求该二次函数的表达式；

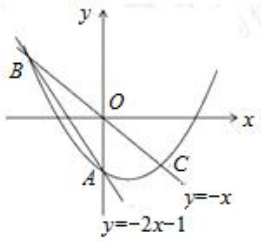
（2）判断点 B 是否在此二次函数的图象上，并说明理由．



19．如图，在平面直角坐标系中，O 为原点，直线 $y=-2x-1$，与 y 轴交于点 A，与直线 $y=-x$ 交于点 B，点 B 关于原点的对称点为点 C.

（1）求过 A，B，C 三点的抛物线的解析式；

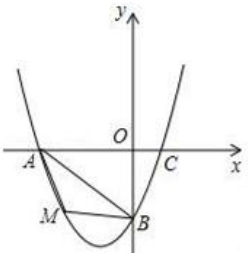
（2）P 为抛物线上一点，它关于原点的对称点为 Q，当四边形 $PBQC$ 为菱形时，求点 P 的坐标.



20．在平面直角坐标系中，已知抛物线经过 A（−4，0），B（0，−4），C（2，0）三点.

（1）求抛物线的解析式；学科网

（2）若点 M 为第三象限内抛物线上一动点，点 M 的横坐标为 m，$\triangle AMB$ 的面积为 S．求 S 关于 m 的函数关系式，并求出 S 的最大值.



参考答案

1．【答案】C

【解析】由二次函数的定义：“形如 $y=ax^2+bx+c$（其中 a、b、c 为常数，且 $a\neq 0$）”的函数叫做二次函数可知：A、B、D 选项均不符合定义要求，只有 C 符合定义，故选 C.

2．【答案】B

【解析】根据顶点式可得抛物线的对称轴为直线 $x=1$．故选 B.

3．【答案】D

【解析】由“上加下减”的原则可知，抛物线 $y=2x^2$ 向下平移 1 个单位，所得到的抛物线是 $y=2x^2-1$．故选

D.

4. 【答案】C

【解析】由图象可知二次函数的对称轴为 $x=-3$，所以当 $x>-3$ 时，y 随着 x 的增加而减小.∵2>1，∴$y_1>y_2$.

故选 C.

5. 【答案】B

【解析】∵$y=2x^2+1=2(x-0)^2+1$，∴抛物线的顶点坐标为（0，1），故选 B.

6. 【答案】D

【解析】∵抛物线 $y=(m+1)x^2+2$ 的顶点是此抛物线的最高点，

∴抛物线开口向下，∴$m+1<0$，∴$m<-1$，故选 D.

7. 【答案】D

【解析】第一种情况：

当二次函数的对称轴不在 $1\le x\le 4$ 内时，此时，对称轴一定在 $1\le x\le 4$ 的右边，函数方能在 $x=1$ 取得最大值，

$x=\dfrac{a-5}{2}>4$，即 $a>13$；

第二种情况：

当对称轴在 $1\le x\le 4$ 内时，对称轴一定是在区间 $1\le x\le 4$ 的中点的右边，因为如果在中点的左边的话，就是在 $x=4$ 取得最大值，即：

$x=\dfrac{a-5}{2}\ge\dfrac{1+4}{2}$，即 $a\ge 10$（此处若 x 取 2.5 的话，函数就在 1 和 4 的地方都取得最大值）.

综合上所述 $a\ge 10$. 故选 D.

8. 【答案】D

【解析】A、由表格数据可知 $x=1$ 时，y 的值最小，所以抛物线开口向上.所以该抛物线与 x 轴有两个交点.故本选项正确；

B、根据表格可知，当 $x\ge 2$ 时 y 随 x 的增大而增大.故本选项正确；

C、抛物线的开口方向向上，抛物线与 y 轴的交点坐标是$(0，-\dfrac{5}{4})$，对称轴是 $x=1$，所以二次函数图象与 x 轴交点横坐标一个在 $-1\sim 0$ 之间，另一个在 $2\sim 3$ 之间.故本选项正确；

D、因为 $x=0$ 和 $x=2$ 时的函数值相等，则抛物线的对称轴为直线 $x=1$.故本选项错误；

故选 D.

9. 【答案】B

【解析】由图可知，第 1、2 两个图形的对称轴为 y 轴，所以 $x=-\dfrac{b}{2a}=0$，解得 $b=0$，与 $b>0$ 相矛盾；

第 3 个图，抛物线开口向上，$a>0$，

经过坐标原点，$a^2-1=0$，

解得 $a_1=1$，$a_2=-1$（舍去），

对称轴 $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{b}{2\times1}>0$，

所以 $b<0$，不符合题意；

第 4 个图，抛物线开口向下，$a<0$，

经过坐标原点，$a^2-1=0$，

解得 $a_1=1$（舍去），$a_2=-1$，

对称轴 $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{b}{2\times(-1)}>0$，

所以 $b>0$，符合题意，

综上所述，a 的值等于 -1.

故选 B.

10. 【答案】A

【解析】①观察函数图象可得出 $a<0$、$c>0$，$-\frac{b}{2a}>0$，

∴进而可得出 $b>0$，∴$abc<0$，故①错误；

②由当 $x=-1$ 时 $y<0$，∴$a-b+c<0$，∴$b>a+c$，②错误；

③由抛物线与 x 轴有两个交点，可得出 $\Delta=b^2-4ac>0$，③错误；

④由抛物线的对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}=1$，∴可得出 $2a+b=0$，④正确.

故选 A.

11. 【答案】$y=-(x-2)^2+1$（或 $y=-x^2+4x-3$）

【解析】设抛物线解析式为 $y=a(x-2)^2+1$，把 B（1，0）代入得 $a+1=0$，解得 $a=-1$，所以抛物线解析式为 $y=-(x-2)^2+1$，即 $y=-x^2+4x-3$，故答案为：$y=-(x-2)^2+1$（或 $y=-x^2+4x-3$）.

12. 【答案】6

【解析】已知抛物线 $y=ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）与 x 轴交于 A，B 两点，点 A 的坐标为（-1，0），抛物线的对称轴为直线 $x=2$，可得点 B 的坐标为（5，0），所以线段 AB 的长为 6，故答案为：6.

13. 【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】令 $y=0$，则 $\frac{1}{2}x^2-x=0$，解得 $x=0$ 或 2，∴点 A 坐标（2，0），∵△OAP 是以 OA 为底边的等腰三角形，∴点 P 是抛物线顶点，∴点 P 坐标（1，$-\frac{1}{2}$），∴$S_{\triangle OAP}=\frac{1}{2}\times2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，故答案为：$\frac{1}{2}$.

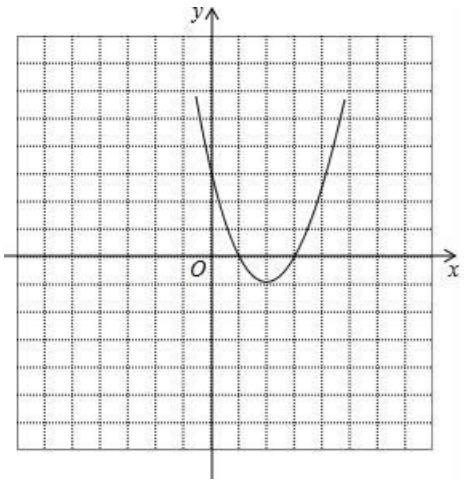
14. 【答案】3

【解析】令 $y=0$，$ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$），因为抛物线与 x 轴有两个交点，所以一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）有两个不相等的实数根，所以$\Delta=b^2-4ac>0$，①正确；抛物线开口向上，所以 $a>0$，对称轴位于 y 轴右侧，所以 $b<0$，抛物线与 y 轴交于负半轴，所以 $c<0$，所以 $abc>0$，②错误；$ax^2+bx+c-m=0$ 没有实数根，即 $ax^2+bx+c=m$ 没有实数根，即 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）与 $y=m$ 没有交点，通过图象可得，$m<-3$，③正确；由图象可得，$-\frac{b}{2a}=1$，∴$b=-2a$，$3a+b=3a-2a=a>0$，④正确，正确的有 3 个，故答案为：3.

15. 【解析】∵$y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$，

∴顶点坐标为（2，−1），

其图象如图所示：



16. 【解析】设此抛物线的解析式 $y=ax^2+2$，

则 $3=a+2$，解得 $a=1$，

∴此抛物线的解析式为 $y=x^2+2$.

17. 【解析】（1）∵抛物线 $y=x^2+bx-3$ 经过点 A（−1，0），

∴$0=1-b-3$，解得 $b=-2$，

∴抛物线解析式为 $y=x^2-2x-3$，

∵$y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$，

∴抛物线顶点坐标为（1，−4）.

（2）①由 P（m，t）在抛物线上可得 $t=m^2-2m-3$，

∵点 P'与 P 关于原点对称，

∴P'（$-m$，$-t$），

∵点 P'落在抛物线上，

∴$-t=(-m)^2-2(-m)-3$，即 $t=-m^2-2m+3$，

∴$m^2-2m-3=-m^2-2m+3$，解得 $m=\sqrt{3}$ 或 $m=-\sqrt{3}$．

②由题意可知 P'（$-m$，$-t$）在第二象限，

∴$-m<0$，$-t>0$，即 $m>0$，$t<0$，

∵抛物线的顶点坐标为（1，-4），

∴$-4\le t<0$，

∵P 在抛物线上，∴$t=m^2-2m-3$，∴$m^2-2m=t+3$，

∵A（-1，0），P'（$-m$，$-t$），

∴$P'A^2=(-m+1)^2+(-t)^2=m^2-2m+1+t^2=t^2+t+4=(t+\frac{1}{2})^2+\frac{15}{4}$，

∴当 $t=-\frac{1}{2}$ 时，$P'A^2$ 有最小值，

∴$-\frac{1}{2}=m^2-2m-3$，解得 $m=\frac{2-\sqrt{14}}{2}$ 或 $m=\frac{2+\sqrt{14}}{2}$，

∵$m>0$，

∴$m=\frac{2-\sqrt{14}}{2}$ 不合题意，舍去，

∴m 的值为 $\frac{2+\sqrt{14}}{2}$．

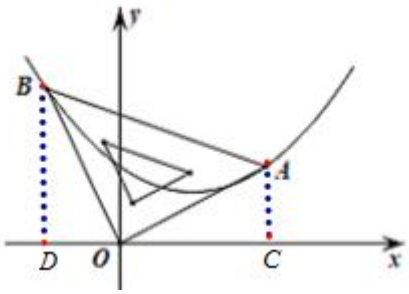
18．【解析】（1）设二次函数的表达式为 $y=a(x-1)^2+\frac{2}{3}$，

∵图象过 A（2，1），

∴$a+\frac{2}{3}=1$，即 $a=\frac{1}{3}$，

∴$y=\frac{1}{3}(x-1)^2+\frac{2}{3}$．

（2）过点 A，B 分别作 $AC\perp x$ 轴，$BD\perp x$ 轴，垂足分别为 C，D．



易证得△AOC≌△OBD，

∴$DO=AC=1$，$BD=OC=2$，

∴B（−1，2），

当 $x=-1$ 时，$y=\frac{1}{3}\times(-1-1)^2+\frac{2}{3}=2$，

∴点 B 在这个函数图象上.

19．【解析】（1）联立两直线解析式可得$\begin{cases}y=-x\\y=-2x-1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$，

∴B 点坐标为（−1，1），

又 C 点为 B 点关于原点的对称点，

∴C 点坐标为（1，−1），

∵直线 $y=-2x-1$ 与 y 轴交于点 A，

∴A 点坐标为（0，−1），

设抛物线解析式为 $y=ax^2+bx+c$，

把 A、B、C 三点坐标代入可得$\begin{cases}-1=c\\1=a-b+c\\-1=a+b+c\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=1\\b=-1\\c=-1\end{cases}$，

∴抛物线解析式为 $y=x^2-x-1$.

（2）当四边形 $PBQC$ 为菱形时，则 $PQ\perp BC$，

∵直线 BC 解析式为 $y=-x$，

∴直线 PQ 解析式为 $y=x$，

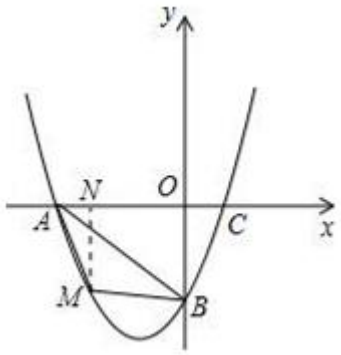
联立抛物线解析式可得$\begin{cases}y=x\\y=x^2-x-1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=1-\sqrt{2}\\y=1-\sqrt{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1+\sqrt{2}\\y=1+\sqrt{2}\end{cases}$，

∴P 点坐标为（$1-\sqrt{2}$，$1-\sqrt{2}$）或（$1+\sqrt{2}$，$1+\sqrt{2}$）.

20．【解析】（1）设抛物线解析式为 $y=a$（$x+4$）（$x-2$），将 B（0，−4）代入得：$-4=-8a$，即 $a=\frac{1}{2}$，

则抛物线解析式为 $y=\frac{1}{2}$（$x+4$）（$x-2$），即 $y=\frac{1}{2}x^2+x-4$.

（2）过 M 作 $MN\perp x$ 轴，



将 $x=m$ 代入抛物线得：$y=\frac{1}{2}m^2+m-4$，即 M（m，$\frac{1}{2}m^2+m-4$），

$\therefore MN=|\frac{1}{2}m^2+m-4|=-\frac{1}{2}m^2-m+4$，$ON=-m$，

$\because A$（-4，0），B（0，-4），$\therefore OA=OB=4$，

$\therefore \triangle AMB$ 的面积为 $S=S_{\triangle AMN}+S_{\text{梯形 }MNOB}-S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times(4+m)\times(-\frac{1}{2}m^2-m+4)+\frac{1}{2}\times(-m)\times(-\frac{1}{2}m^2-m+4+4)$

$-\frac{1}{2}\times4\times4$

$=2(-\frac{1}{2}m^2-m+4)-2m-8$

$=-m^2-4m$

$=-(m+2)^2+4$，

当 $m=-2$ 时，S 取得最大值，最大值为 4．学科网