2020～2021 学年度上期期末高二年级调研考试

数学(理科)参考答案及评分意见

第Ⅰ卷(选择题,共 60 分)

一、选择题:(每小题 5 分,共 60 分)

1. A； 2. B； 3. C； 4. D； 5. C； 6. B； 7. B； 8. B； 9. A； 10. C； 11. C； 12. D.

第Ⅱ卷(非选择题,共 90 分)

二、填空题:(每小题 5 分,共 20 分)

13. 6； 14. ③； 15. $\frac{5}{6}$； 16. $\frac{3}{2}$.

三、解答题:(共 70 分)

17. **解:**(Ⅰ)由题意,易知 $|MF_2|=2$，$|F_1F_2|=2\sqrt{3}$，且 $MF_2\perp F_1F_2$. ……1 分

在 $\mathrm{Rt}\triangle MF_2F_1$ 中，$|MF_1|=\sqrt{|MF_2|^2+|F_1F_2|^2}=4$. ……2 分

由双曲线的定义可知，$|MF_1|-|MF_2|=2a$，$\therefore 2a=2$，即 $a=1$. ……3 分

$\because$ 双曲线 C 的两个焦点分别为 $F_1(-\sqrt{3},0)$，$F_2(\sqrt{3},0)$，

$\therefore$ 半焦距 $c=\sqrt{3}$.

又 $\because a^2+b^2=c^2$，$\therefore b=\sqrt{2}$. ……4 分

故双曲线 C 的虚轴长为 $2\sqrt{2}$. ……5 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)知双曲线 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$. ……6 分

设与双曲线 C 有相同渐近线的双曲线的方程为 $x^2-\frac{y^2}{2}=\lambda(\lambda\neq 0)$. ……7 分

将点 $P(-2,4)$ 的坐标代入上述方程,得 $\lambda=-4$. ……9 分

故所求双曲线的标准方程为 $\frac{y^2}{8}-\frac{x^2}{4}=1$. ……10 分

18. **解:**(Ⅰ)由圆 E 经过点 $A(-6,0)$，$B(2,0)$，得圆心 E 在直线 $x=-2$ 上. ……2 分

又 $\because$ 圆心 E 在直线 $y=-x$ 上，$\therefore$ 圆心 E 的坐标为 $(-2,2)$. ……3 分

设圆 E 的半径为 r，则 $r=|EB|=\sqrt{[2-(-2)]^2+(0-2)^2}=2\sqrt{5}$. ……4 分

故圆 E 的方程为 $(x+2)^2+(y-2)^2=20$. ……5 分

化成一般方程为 $x^2+y^2+4x-4y-12=0$. ……6 分

(Ⅱ)圆 O 与圆 E 的方程联立,得到方程组 $\begin{cases} x^2+y^2-4=0,\cdots① \\ x^2+y^2+4x-4y-12=0.\cdots② \end{cases}$

①－②,得 $x-y-2=0$,即为直线 MN 的方程. ……8 分

原点 O 到直线 MN 的距离 $d=\dfrac{|-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$. ……10 分

又圆 O 的半径为 2,∴由勾股定理,得 $\dfrac{|MN|}{2}=\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$. ……11 分

故 $|MN|=2\sqrt{2}$. ……12 分

19. **解**:(Ⅰ)根据频率分布直方图,得 y_i 的最大值为 $y_5=0.50$,

该值所对应小长方形左右两个边界值分别为 2 和 2.5.

∴对应组的中间值 $x_5=\dfrac{2+2.5}{2}=2.25$,即 Mo 的值为 2.25. ……4 分

(Ⅱ)执行程序框图,输入 $y_1=0.08$,得 $S=0+0.5\times0.08=0.04\leqslant0.5$; ……5 分

输入 $y_2=0.16$,得 $S=0.04+0.5\times0.16=0.12\leqslant0.5$; ……6 分

输入 $y_3=0.30$,得 $S=0.12+0.5\times0.30=0.27\leqslant0.5$; ……7 分

输入 $y_4=0.44$,得 $S=0.27+0.5\times0.44=0.49\leqslant0.5$; ……8 分

输入 $y_5=0.50$,得 $S=0.49+0.5\times0.50=0.74>0.5$.

故输出结果 i 的值为 5. ……9 分

∴ $n=5-1=4$,

$$Me=0.75+x_{n+1}-\sum_{k=1}^{n}y_k=0.75+x_5-\sum_{k=1}^{4}y_k=0.75+2.25-0.98=2.02.$$

……11 分

而 $Mo=2.25$,即有 $Me<Mo$.

∴本题样本数据符合“左偏分布”. ……12 分

20. **解**:(Ⅰ)由题意,得 $\bar{x}=5$, $\bar{y}=7$. ……1 分

由参考数据 $\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=50$, $\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i-5\bar{x}\bar{y}=63$.

得 $\hat{b}=\dfrac{63}{50}=1.26$. ……3 分

又 $\bar{x}=5$, $\bar{y}=7$,∴ $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=7-5\times1.26=0.7$. ……4 分

故所求线性回归方程为 $\hat{y}=1.26x+0.7$. ……5 分

(Ⅱ)依题意 B 地和 E 地属于“甲类区域”,两地共计 5 名医务人员参与治疗,

总共有 35 位医务人员参与治疗,所以应从“甲类区域”的 5 名医务人员抽取

$14\times\dfrac{5}{35}=2$ 名. ……7 分

记 B 地三名医务人员分别为 B_1, B_2, B_3，E 地两名医务人员分别为 E_1, E_2.

则所抽两名医务人员所有可能结果为 (B_1,B_2)，(B_1,B_3)，(B_2,B_3)，(B_1,E_1)，(B_1,E_2)，(B_2,E_1)，(B_2,E_2)，(B_3,E_1)，(B_3,E_2)，(E_1,E_2)，共计 10 种. ……9 分

这两名医务人员分别来自不同地区的结果有

(B_1,E_1)，(B_1,E_2)，(B_2,E_1)，(B_2,E_2)，(B_3,E_1)，(B_3,E_2)，共计 6 种. ……11 分

故所抽取的“甲类区域”的医务人员来自不同地区的概率为 $\frac{3}{5}$. ……12 分

21. **解**：(Ⅰ)设 $M(x,y)$，$P(x_P,y_P)$，则 $D(x_P,0)$.

∵ M 为线段 PD 的中点，∴ $\begin{cases} x = x_P \\ y = \dfrac{y_P + 0}{2} \end{cases}$，即 $x_P = x$，$y_P = 2y$. ……3 分

又点 P 在圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 上，∴ $x^2 + (2y)^2 = 4$，即 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

故点 M 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. ……5 分

(Ⅱ)由题意，可知 $|m| > 1$，且直线 l 的斜率一定存在且不为 0.

不妨设直线 l 的方程为 $y = kx + m$（$k \neq 0$）. 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

由直线 l 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切，得 $\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}} = 1$，即 $m^2 = 1 + k^2$. ……6 分

由 $\begin{cases} y = kx + m \\ \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$，消去 y，得 $(1+4k^2)x^2 + 8mkx + 4m^2 - 4 = 0$.

$\Delta = (8mk)^2 - 4(1+4k^2)(4m^2-4) = 16(4k^2 - m^2 + 1) = 48k^2 > 0$ 恒成立.

则 $x_1 + x_2 = \frac{-8mk}{1+4k^2}$，$x_1x_2 = \frac{4m^2-4}{1+4k^2}$. ……8 分

∴ $|AB| = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{-8mk}{1+4k^2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{4m^2-4}{1+4k^2}}$

$= \frac{4\sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{4k^2 - m^2 + 1}}{1+4k^2}$. ……9 分

将 $m^2 = 1 + k^2$ 代入上式，则 $|AB| = \frac{4\sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{3k^2}}{1+4k^2}$.

又原点 O 到直线 l 的距离等于圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的半径 1，

∴ $\triangle OAB$ 面积 $S = \frac{1}{2}|AB| \times 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{3k^2}}{1+4k^2}$

$=\dfrac{2\times\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{3k^2}}{1+4k^2}\leqslant\dfrac{[(\sqrt{1+k^2})^2+(\sqrt{3k^2})^2]}{1+4k^2}=1.$

当且仅当 $\sqrt{1+k^2}=\sqrt{3k^2}$，即 $k^2=\dfrac{1}{2}$ 时等号成立.

此时 $m^2=1+k^2=\dfrac{3}{2}>1$，　满足题意. ……11 分

综上所述，$\triangle OAB$ 面积的最大值为 1. ……12 分

22. **解**：(Ⅰ)根据线段垂直平分线的性质，知 $|MH|=|MF|$. ……2 分

∴动点 M 的轨迹是以 $F(1,0)$ 为焦点，$x=-1$ 为准线的抛物线. ……3 分

故曲线 C 的方程为 $y^2=4x$. ……5 分

(Ⅱ)设点 $A(x_A,y_A)$，$B(x_B,y_B)$，$P(x_P,y_P)$，$Q(x_Q,y_Q)$，$E(m,0)(m>0)$，

直线 $l_{AB}:x=ty+m,t\neq0$.

由 $\begin{cases}x=ty+m\\y^2=4x\end{cases}$，消去 x，得 $y^2-4ty-4m=0$.

∵$t\neq0,\Delta=16(t^2+m)>0$，

∴ $y_A+y_B=4t,y_Ay_B=-4m$. ……6 分

又 $\overrightarrow{FP}=(x_P-1,y_P)$，$\overrightarrow{FA}=(x_A-1,y_A)$，

由 A,F,P 三点共线，知 $y_A(x_P-1)-y_P(x_A-1)=0$，

即 $y_A(\dfrac{y_P^2}{4}-1)-y_P(\dfrac{y_A^2}{4}-1)=0$.　化简，得 $(\dfrac{y_Ay_P}{4}+1)(y_P-y_A)=0$. ……8 分

显然 $y_P\neq y_A$，∴ $\dfrac{y_Ay_P}{4}+1=0$，即 $y_Ay_P=-4$.

同理可得 $y_By_Q=-4$. ……9 分

∴ $k_2=\dfrac{y_Q-y_P}{x_Q-x_P}=\dfrac{y_Q-y_P}{\dfrac{y_Q^2}{4}-\dfrac{y_P^2}{4}}=\dfrac{4}{y_Q+y_P}=\dfrac{4}{\dfrac{-4}{y_B}+\dfrac{-4}{y_A}}=-\dfrac{y_Ay_B}{y_A+y_B}=\dfrac{m}{t}$. ……11 分

又 $k_1=\dfrac{1}{t}$，由 $k_2=2k_1$，有 $\dfrac{m}{t}=\dfrac{2}{t}$.　∴ $m=2$.

故点 E 的坐标为 $(2,0)$. ……12 分