2019~2020学年3月广东深圳南山区深圳市南头中学高三下学期月考理科数学试卷

一、选择题

（本大题共12小题，每小题5分，共60分）

1 已知集合$A=\left\{-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right\}$，$B=\{x|ax+1=0\}$，且$B\subseteq A$，则$a$的可能取值组成的集合为（ ）.

A. $\{-3,2\}$　　B. $\{-3,0,2\}$　　C. $\{3,-2\}$　　D. $\{3,0,-2\}$

2 已知复数$z=\frac{1}{1+\mathrm{i}}$，命题p：复数z的虚部为$\frac{1}{2}$，命题q：复数z的模为1．下列命题为真命题的是（ ）.

A. $p\vee q$　　B. $p\wedge(\neg q)$　　C. $p\wedge q$　　D. $(\neg p)\wedge(\neg q)$

3 若向量$\vec{a}$与$\vec{b}$满足$(\vec{a}+\vec{b})\perp\vec{a}$，且$|\vec{a}|=1$．$|\vec{b}|=2$，则向量$\vec{a}$在$\vec{b}$方向上的投影为（ ）.

A. $\sqrt{3}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. -1　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

4 公元前5世纪，古希腊哲学家芝诺发表了著名的阿基里斯悖论：他提出让乌龟在阿基里斯前面1000米处开始，和阿基里斯赛跑，并且假定阿基里斯的速度是乌龟的10倍．当比赛开始后，若阿基里斯跑了1000米，此时乌龟便领先他100米；当阿基里斯跑完下一个100米时，乌龟仍然前于他10米．当阿基里斯跑完下一个10米时，乌龟仍然前于他1米$\cdots\cdots$，所以，阿基里斯永远追不上乌龟．按照这样的规律，若阿基里斯和乌龟的距离恰好为10^{-3}米时，乌龟爬行的总距离为（ ）.

A. $\dfrac{10^5-1}{90}$米　　B. $\dfrac{10^6-1}{9000}$米　　C. $\dfrac{10^6-9}{900}$米　　D. $\dfrac{10^5-9}{900}$米

5 已知定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)=2^{|x-m|}-1$（m为实数）为偶函数，记$a=f(\log_{0.5}3)$，$b=f(\log_2 5)$，$c=f(2+m)$则a，b，c的大小关系为（ ）.

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$　　C. $c<a<b$　　D. $c<b<a$

6 记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和，已知$a_1+a_{21}=0$，$S_{14}=98$，则（ ）.

A. $a_n=-n+11$　　B. $a_n=-2n+22$

C. $S_n=n^2-7n$　　D. $S_n=-\dfrac{1}{2}n^2+14n$

7 已知α，β是两个不同的平面，l是一条直线，给出下列说法：（ ）.

①若$l\perp\alpha$，$\alpha\perp\beta$，则$l//\beta$；

②若$l//\alpha$，$\alpha//\beta$，则$l//\beta$；

③若$l\perp\alpha$，$\alpha//\beta$，则$l\perp\beta$；

④若$l//\alpha$，$\alpha\perp\beta$，则$l\perp\beta$；

其中说法正确的个数为（ ）.

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

8 若5个人各写一张卡片（每张卡片的形状，大小均相同），现将这5张卡片放入一个不透明的箱子里，并搅拌均匀，再让这5人在箱子里各摸一张，恰有1人摸到自己写的卡片的方法数有（ ）.

A. 20　　B. 90　　C. 15　　D. 45

9 设双曲线的右顶点为A，右焦点为F，B为双曲线在第二象限上的点，直线BO交双曲线于C点，若直线AC平分线段BF于M，则双曲线的离心率是（ ）.

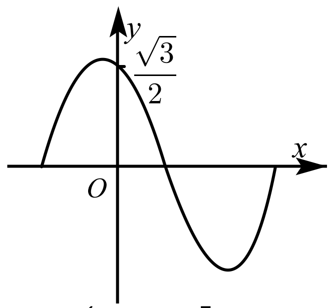
A. $\dfrac{1}{2}$　　B. 2　　C. $\dfrac{1}{3}$　　D. 3

10

已知函数$f(x)=\begin{cases}-x^2+ax, & x\leqslant 1\\ a^2x^2-7, & x>1\end{cases}$，若存在$x_1$，$x_2\in\mathbf{R}$，且$x_1\neq x_2$，使$f(x_1)=f(x_2)$，则实数$a$的取值范围是（ ）.

A. $a<3$　　B. $-2<a<3$　　C. $-2\leqslant a\leqslant 2$　　D. $a<2$

11 将函数$f(x)=\sin(2\omega x+\varphi)(\omega>0,\varphi\in[0,2\pi])$图象上每点的横坐标变为原来的$2$倍，得到函数$g(x)$，函数$g(x)$的部分图象如图所示，且$g(x)$在$[0,2\pi]$上恰有一个最大值和一个最小值(其中最大值为$1$，最小值为$-1$)，则$\omega$的取值范围是（ ）.



A. $\left(\frac{7}{12},\frac{13}{12}\right]$　　B. $\left[\frac{7}{12},\frac{13}{12}\right)$　　C. $\left[\frac{11}{12},\frac{17}{12}\right)$　　D. $\left(\frac{11}{12},\frac{17}{12}\right]$

12 已知球O是三棱锥$P-ABC$的外接球，$PA=AB=PB=AC=1$，$CP=\sqrt{2}$，点D是PB的中点，且$CD=\frac{\sqrt{7}}{2}$，则球O的表面积为（ ）.

A. $\frac{7\pi}{3}$　　B. $\frac{7\pi}{6}$　　C. $\frac{7\sqrt{21}\pi}{27}$　　D. $\frac{7\sqrt{21}\pi}{54}$

二、填空题

（本大题共4小题，每小题5分，共20分）

13 若$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{3}$，则$\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$的值是_____.

14 若$\left(a+\frac{a}{x^2}\right)(1+x)^6$展开式中$x^2$的系数为$30$，则$a=$_____.

15

若等差数列$\{a_n\}$的公差为2，且a_5是a_2与a_6的等比中项，则该数列的前n项和S_n取最小值时，则$n=$______.

16 过抛物线$y^2=2px\ (p>0)$的焦点F作两条相互垂直的射线，分别与抛物线相交于点M，N，过弦MN的中点P作抛物线准线的垂线PQ，垂足为Q，则$\dfrac{|PQ|}{|MN|}$的最大值为______.

三、解答题

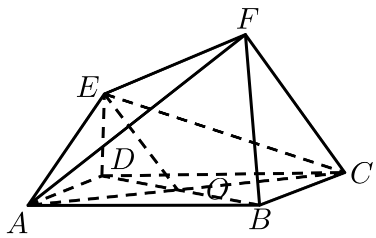
（本大题共5小题，每小题12分，共60分）

17 在$\triangle ABC$中，角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$\sin B\cos A=(2\sin C-\sin A)\cos B$.

（1） 求B.

（2） 若$b=5$，且AC边上的中线长为3，求$\triangle ABC$的面积.

18 如图所示的多面体$ABCDEF$中，四边形$ABCD$是边长为2的正方形，$ED//FB$，$DE=\dfrac{1}{2}BF$，$AB=FB$，$FB\perp$ 平面$ABCD$.



（1） 设BD与AC的交点为O，求证：$OE\perp$平面ACF.

（2） 求二面角$E-AF-C$的正弦值.

19 已知椭圆$E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，且过点$\left(\sqrt{3},\dfrac{1}{2}\right)$．直线$l:y=x+m$与$y$轴交于点$P$，与椭圆交于$M$，$N$两点.

（1） 求椭圆E的标准方程.

（2） 若$\overrightarrow{MP}=3\overrightarrow{PN}$，求实数$m$的值.

20 某个地区计划在某水库建一座至多安装3台发电机的水电站，过去50年的水文资料显示，水的年入流量X（年入流量：一年内上游来水与库区降水之和，单位：十亿立方米）都在4以上，其中，不足8的年份有10年，不低于8且不超过12的年份有35年，超过12的年份有5年，将年入流量在以上三段的频率作为相应段的概率，并假设各年的年入流量相互独立.

（1） 求未来4年中，至多有1年的年入流量超过12的概率.

（2） 若水的年入流量X与其蕴含的能量y（单位：百亿万焦）之间的部分对应数据为如下表所示：

年入流量X	6	8	10	12	14
蕴含的能量y	1.5	2.5	3.5	5	7.5

用最小二乘法求出y关于X的线性回归方程$\hat{y}=\hat{b}X+\hat{a}$；（回归方程系数用分数表示）

（3） 水电站希望安装的发电机尽可能运行，但每年发电机最多可运行台数受年入流量X限制，并有如下关系：

年入流量X	$4<X<8$	$8\leqslant X\leqslant 12$	$X>12$
发电机最多可运行台数	1	2	3

若某台发电机运行，则该台年利润为5000万元；若某台发电机未运行，则该台年亏损800万元，欲使水电站年总利润的均值达到最大，应安装发电机多少台？

附：回归方程系数公式：$b=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-b\overline{x}$.

21 请回答下列问题.

（1） 证明函数$y=\mathrm{e}^x-2\sin x-2x\cos x$在区间$\left(-\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right)$上单调递增.

（2） 证明函数$f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}-2\sin x$在$(-\pi,0)$上有且仅有一个极大值点$x_0$，且$0<f(x_0)<2$.

四、选做题

（本大题共2小题，选做1题，共10分）

选修4-4：坐标系与参数方程

22 在平面直角坐标系xOy中，直线l的参数方程为$\begin{cases} x = m + 2t \\ y = \sqrt{2}t \end{cases}$，（$t$为参数），以坐标原点为极点，$x$轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线$C$的极坐标方程为$\rho^2 = \dfrac{4}{1+\sin^2\theta}$.

（1） 求直线l的普通方程和曲线C的直角坐标方程.

（2） 设P为曲线C上的点，$PQ \perp l$，垂足为Q，若$|PQ|$的最小值为2，求m的值.

选修4-5：不等式选讲

23 已知函数$f(x) = |x| + |x + a|$.

（1） 若存在x使得不等式$f(x) \leqslant 3a - 1$成立，求实数a的取值范围.

（2） 若不等式$f(x) \leqslant 3a - 1$的解集为$[b, b+3]$，求实数a，b的值.