2019~2020学年4月广东深圳宝安区深圳市宝安中学高中部高三下学期月考理科数学试卷

一、选择题

1. 已知集合$A=\{x\in\mathbf{Z}|x\geqslant a\}$，集合$B=\{x\in\mathbf{Z}|2^x\leqslant 4\}$，若$A\cap B$只有$4$个子集，则$a$的取值范围是（ ）.

A. $(-2,-1]$　　B. $[-2,-1]$　　C. $[0,1]$　　D. $(0,1]$

2. 已知复数$z(1+\mathrm{i})=3-\mathrm{i}$，则复数$z$的虚部为（ ）.

A. 2　　B. $2\mathrm{i}$　　C. -2　　D. $-2\mathrm{i}$

3. 已知某一组散点数据对应的线性回归方程为$\hat{y}=-0.76x+\hat{a}$，数据中心点为$(5,1)$，则$x=7.5$的预报值是（ ）.

A. 0.9　　B. -0.9　　C. 1　　D. -1

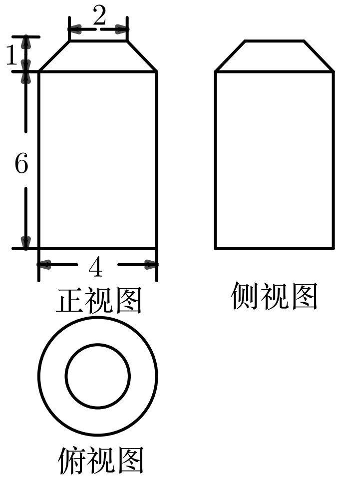
4. 已知直线$y=kx(k\neq 0)$与双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$交于$A$，$B$两点，$F$是双曲线的右焦点， 若$||AF|-|BF||=4$，双曲线的一条渐近线方程是$y=-2x$，则双曲线的虚轴长为（ ）.

A. 2　　B. 4　　C. $4\sqrt{3}$　　D. 8

5. 若$\left(\dfrac{1}{2x^2}-x\right)^n$的展开式中第$r+1$项为常数项，则$\mathrm{C}_{2020}^{1}\cdot\left(\dfrac{3r}{n}\right)-\mathrm{C}_{2020}^{2}\cdot\left(\dfrac{3r}{n}\right)^2+\ldots+(-1)^{r+1}\mathrm{C}_{2020}^{r}\cdot\left(\dfrac{3r}{n}\right)^r+\ldots-\mathrm{C}_{2020}^{2020}\cdot\left(\dfrac{3r}{n}\right)^{2020}=$（ ）.

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

6. 《海岛算经》中有这样一个问题，大意为：某粮行用芦席围成一个粮仓装满米，该粮仓的三视图如图所示（单位：尺），已知1斛米的体积约为1.6立方尺，圆周率约为3，则估算出该粮仓存放的米约为（ ）.



A. 47斛　　B. 49斛　　C. 51斛　　D. 53斛

7. 没有重复数字的五位数$\overline{abcde}$，若满足$a > b$，$b < c$，$c < d$，$d < e$，称这样没有重复数字的五位数$\overline{abcde}$为“对号数”(如$20158, 82367$等)，则不同“对号数”的个数为（　）．

A. 1008　　B. 1890　　C. 3838　　D. 6048

8. 已知点G在等腰直角$\triangle ABC$内，$\angle A$为直角，且满足$2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + 4\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$，现在$\triangle ABC$内随机取一点，此点取自$\triangle GAB$，$\triangle GAC$，$\triangle GBC$的概率分别记为$P_1$，$P_2$，$P_3$，则（　）．

A. $P_1 = P_2 = P_3$　　B. $P_3 > P_2 > P_1$　　C. $P_1 > P_2 > P_3$　　D. $P_2 > P_1 > P_3$

9. $\triangle ABC$中，所有内角都不是钝角，有以下命题：

①$\sin 2A = \sin 2B \Leftrightarrow A = B$；

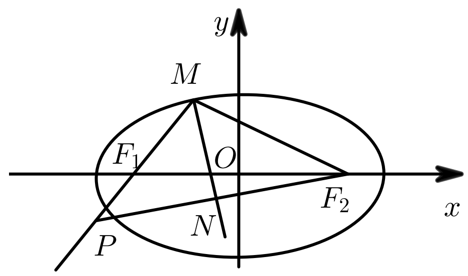
②$\cos 2A > \cos 2B \Leftrightarrow A < B$；

③$\sin A \geqslant \cos B$.

其中正确命题的个数是（　）．

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

10. 如图F_1，F_2分别为椭圆$\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{8} = 1$的左，右焦点，$M$是椭圆上一点，过点$F_2$作$\angle F_1MF_2$的角平分线的垂线，垂足为$N$，若$|ON| = 2$（$O$为坐标原点）则$|OM| =$（　）．



A. $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{3}$

11. 将函数$f(x)=\cos x$的图象先向右平移$\dfrac{5}{6}\pi$个单位长度，再把所得的函数图象的横坐标变为原来的$\dfrac{1}{\omega}(\omega>0)$倍纵坐标不变得到函数$g(x)$的图象，若函数$g(x)$在$\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$上没有零点，则$\omega$的取值范围是（ ）.

A. $\left(0,\dfrac{2}{9}\right]\cup\left[\dfrac{2}{3},\dfrac{8}{9}\right]$

B. $\left(0,\dfrac{2}{9}\right]$

C. $\left(0,\dfrac{2}{9}\right]\cup\left[\dfrac{8}{9},1\right]$

D. $(0,1]$

12. 已知函数$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$满足对于任意$x_1\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$，存在$x_2\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$，使得$f\left(x_1^2+2x_1+a\right)\leqslant f\left(\dfrac{\ln x_2}{x_2}\right)$成立，则实数$a$的取值范围为（ ）.

A. $\left[\dfrac{\ln 2}{2}-8,+\infty\right)$

B. $\left[\dfrac{\ln 2}{2}-8,-\dfrac{5}{4}-2\ln 2\right]$

C. $\left(-\infty,\dfrac{\ln 2}{2}-8\right]$

D. $\left(-\infty,-\dfrac{5}{4}-2\ln 2\right]$

二、填空题

13. $\triangle ABC$中，角A、B、C的对边分别为a、b、c，若$b=2\sqrt{7}$，$c=3$，$B=2C$，则$\cos C$的值为 ______ .

14. 已知实数x，y满足约束条件$\begin{cases}y\leqslant 2\\x+y\geqslant 1\\y\geqslant 2(x-2)\end{cases}$，若$z=x+ty(t>0)$的最大值为$11$，则实数$t=$ ______ .

15. 已知$(4\cos 50^\circ-\tan 40^\circ)\tan\alpha=2\sqrt{3}$，则$\cos(\pi+2\alpha)=$ ______ .

16. 圆锥Ω的底面半径为2，其侧面展开图是圆心角大小为180°的扇形．正四棱柱$ABCD-A'B'C'D'$的上底面的顶点A'，B'，C'，D'均在圆锥Ω的侧面上，棱柱下底面在圆锥Ω的底面上，则此正四棱柱体积的最大值为 ______ .

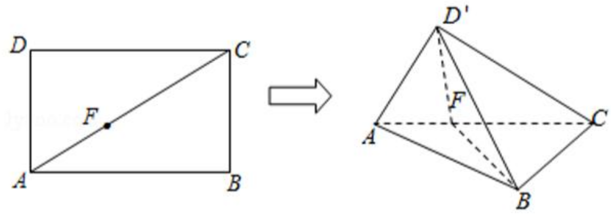
三、解答题

17. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，对于任意的$n\in\mathbf{N}^*$，都有$na_{n+1}=-2(n+1)a_n$，数列$\{a_n\}$的前n项和为T_n，数列$\{b_n\}$满足$b_1=1$，$b_{n+1}=4+b_n$，数列$\{b_n\}$的前n项和为S_n.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式及前n项和T_n.

（2）若对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，$b_n+3<(S_n+32)x$恒成立，求实数x的取值范围.

18. 如图，矩形$ABCD$中，$AB=6$，$AD=2\sqrt{3}$，点F是AC上的动点．现将矩形$ABCD$沿着对角线AC折成二面角$D'-AC-B$，使得$D'B=\sqrt{30}$.



（1）求证：当$AF=\sqrt{3}$时，$D'F\perp BC$.

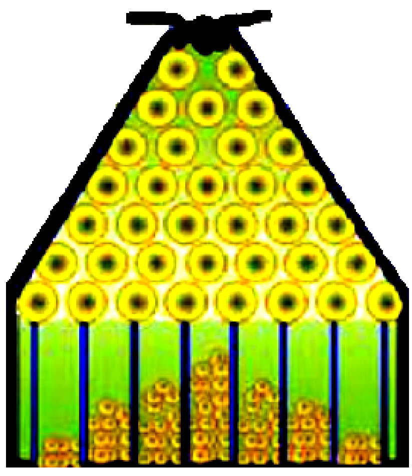
（2）试求CF的长，使得二面角$A-D'F-B$的大小为$\dfrac{\pi}{4}$.

19. 已知抛物线$C:x^2=2py(p>0)$的焦点为F，过点F且斜率为1的直线与抛物线相交于M，N两点．设直线l是抛物线C的切线，且直线$l//MN$，P为l上一点，且$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$的最小值为$-14$.

（1）求抛物线C的方程.

（2）设A，B是抛物线C上分别位于y轴两侧的两个动点，O为坐标原点，且$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-4$．求证：直线$AB$必过定点，并求出该定点的坐标.

20. 高尔顿板是英国生物统计学家高尔顿设计用来研究随机现象的模型，在一块木板上钉着若干排相互平行但相互错开的圆柱形小木块，小木块之间留有适当的空隙作为通道，前面挡有一块玻璃，让一个小球从高尔顿板上方的通道口落下，小球在下落的过程中与层层小木块碰撞，且等可能向左或向右滚下，最后掉入高尔顿板下方的某一球槽内．如图所示的小木块中，上面7层为高尔顿板，最下面一层为改造的高尔顿板，小球从通道口落下，第一次与第2层中间的小木块碰撞，以$\dfrac{1}{2}$的概率向左或向右滚下，依次经过7次与小木块碰撞，最后掉入编号为1，$2\cdots$，6的球槽内．例如小球要掉入3号球槽，则在前6次碰撞中有2次向右4次向左滚到第7层的第3个空隙处，再以$\dfrac{1}{2}$的概率向右滚下，或在前6次碰撞中有3次向右3次向左滚到第7层的第4个空隙处，再以$\dfrac{1}{2}$的概率向左滚下.



1　2　3　4　5　6　7

（1）若进行一次高尔顿板试验，求小球落入第7层第6个空隙处的概率.

（2）小明同学在研究了高尔顿板后，利用该图中的高尔顿板来到社团文化节上进行盈利性“抽奖”活动，8元可以玩一次高尔顿板游戏，小球掉入X号球槽得到的奖金为ξ元．其中$\xi=|20-5X|$.

① 求X的分布列.

② 高尔顿板游戏火爆进行，很多同学参加了游戏，你觉得小明同学能盈利吗?

21. 已知函数$f(x)=ax-\dfrac{a}{x}-\ln x(a\in\mathbf{R})$.

（1）讨论函数$f(x)$的单调区间.

（2）当$a\geqslant\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^2+1}$时，若函数$f(x)$的两个极值点分别为$x_1$，$x_2$，证明$0<|f(x_1)-f(x_2)|<\dfrac{4}{\mathrm{e}^2+1}$.

四、选做题

22. 在直角坐标系xOy中，曲线C_1的参数方程为$\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos\alpha\\ y=6+\sqrt{2}\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$为参数），以坐标原点为极点，$x$轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线$C_2$的极坐标方程为$\rho=\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{1+9\sin^2\theta}}$.

（1）求曲线C_1的普通方程和C_2的直角坐标方程.

（2）若M，N分别为曲线C_1和曲线C_2上的动点，求$|MN|$的最大值.

23. 已知函数$f(x)=|2x-7|+|2x-5|$.

（1）解不等式$f(x)\geqslant 6$.

（2）设函数$f(x)$ 的最小值为m，已知正实数a，b，且$k=\max\left\{\dfrac{1}{a+b},\dfrac{a^2+b^2}{a+b}\right\}$，证明：$k^2m\geqslant 1$.