2019~2020学年5月广东深圳南山区深圳市南头中学高三下学期月考理科数学试卷

一、选择题

（本大题共12小题，每小题5分，共60分）

1. 已知集合$A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 4,x\in\mathbf{Z}\}$，$B=\left\{x|x=2^k,k\in\mathbf{Z}\right\}$，则$A\cap B=$（ ）.

A. $\{2,4\}$　　B. $\{1,2,4\}$　　C. $\{0,1,2\}$　　D. $\{0,1,2,4\}$

2. 设复数$z=2+a\mathrm{i}$，若$z=\overline{z}$，则实数$a=$（ ）.

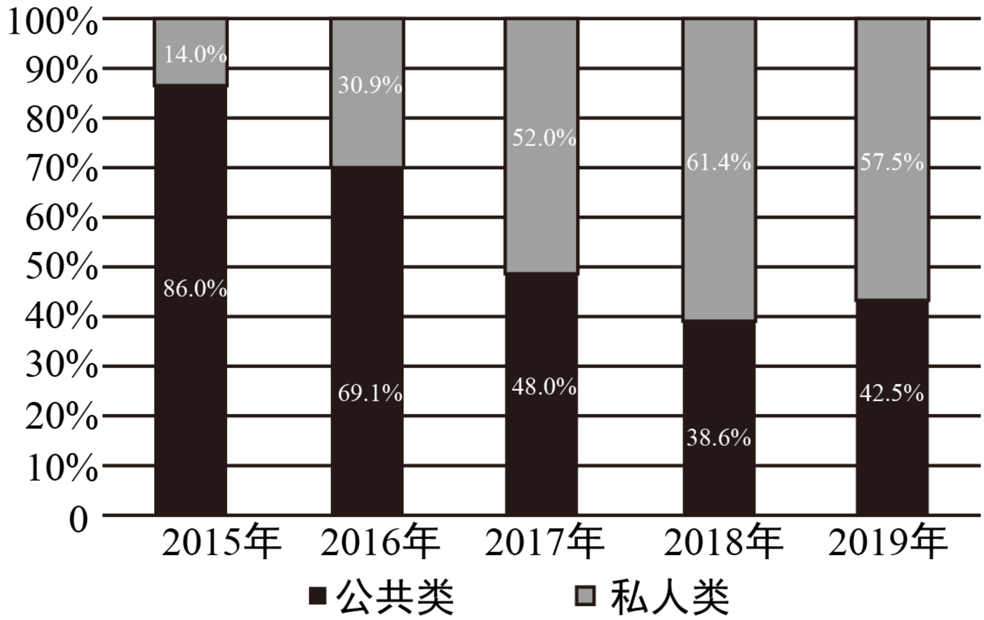
A. 0　　B. 2　　C. -1　　D. -2

3. 若1，a，4，b，c成等比数列，则$b=$（ ）.

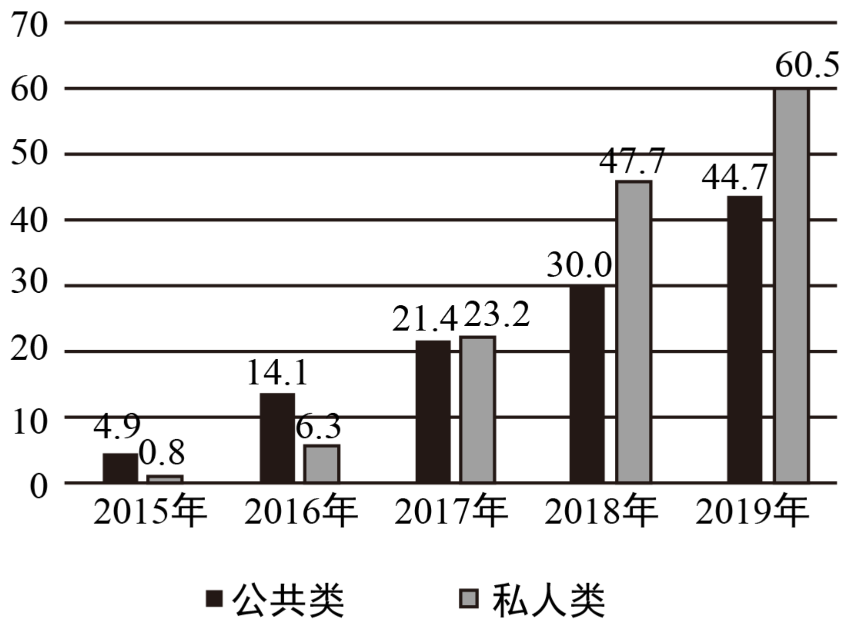
A. $4\sqrt{2}$　　B. 8　　C. ± 8　　D. $\pm 4\sqrt{2}$

4. 如图统计了截止2019年年底中国电动车充电桩细分产品占比及保有量情况，关于这5次统计，下列说法正确的是（ ）.

中国电动车充电桩细分产品占比情况：



中国电动车充电桩细分产品保有量情况：（单位：万台）



A. 私人类电动汽车充电桩保有量增长率最高的年份是2018年

B. 公共类电动汽车充电桩保有量的中位数是25.7万台

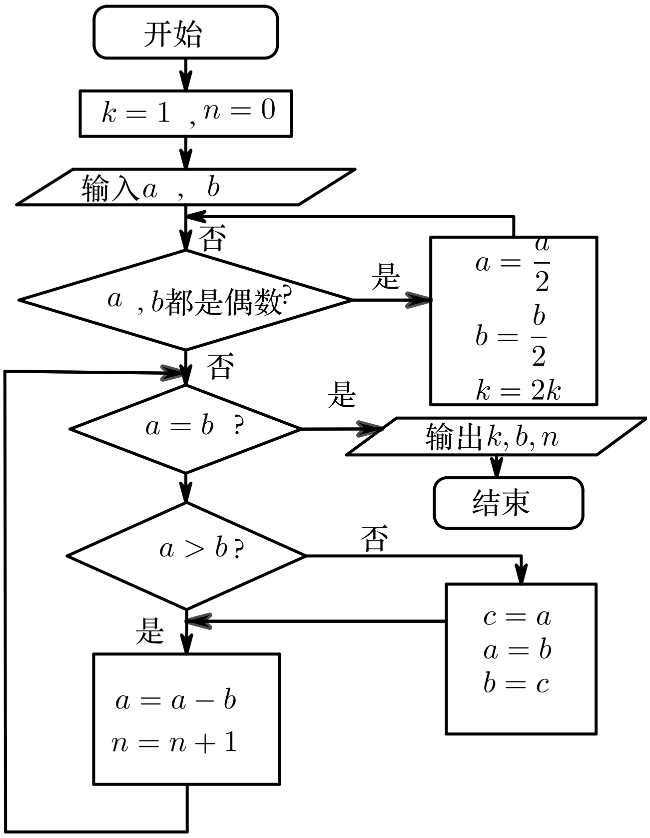
C. 公共类电动汽车充电桩保有量的平均数为23.12万台

D. 从2017年开始，我国私人类电动汽车充电桩占比均超过50%

5. 科赫曲线是一种外形像雪花的几何曲线，一段科赫曲线可以通过下列操作步骤构造得到，任画一条线段，然后把它均分成三等分，以中间一段为边向外作正三角形，并把中间一段去掉，这样，原来的一条线段就变成了4条小线段构成的折线，称为“一次构造”；用同样的方法把每条小线段重复上述步骤，得到16条更小的线段构成的折线，称为“二次构造”，$\cdots$，如此进行“n次构造”，就可以得到一条科赫曲线．若要在构造过程中使得到的折线的长度达到初始线段的1000倍，则至少需要通过构造的次数是（　）．（取$\lg 3 \approx 0.4771$，$\lg 2 \approx 0.3010$）

A. 16　　B. 17　　C. 24　　D. 25

6. 《九章算术》是中国古代的数学专著，其中的“更相减损术”可以用来求两个数的最大公约数，即“可半者半之，不可半者，副置分母，子之数，以少减多，更相减损，求其等也，以等数约之”．翻译成现代语言如下：第一步，任意给定两个正整数，判断他们是否都是偶数，若是，用2约简，若不是，执行第二步，第二步，以较大的数减去较小的数，接着把所得的差与较小的数比较，并以大数减小数，继续这个操作，直到所得的数相等为止，则这个数（等数）或这个数与约简的数的乘积就是所求的最大公约数．现给出“更相减损术”的程序框图如图所示，如果输入的$a = 114$，$b = 30$，则输出的n为（　）．



A. 3　　B. 6　　C. 7　　D. 30

7. $\cos^2\left(-\frac{\pi}{10}-\theta\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}-\theta\right)=$（ ）.

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. 1　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. 已知直线$l\perp$平面α，直线$m//$平面β，若$\alpha\perp\beta$. 则下列结论正确的是（ ）.

A. $l//\beta$或$l\subset\beta$　　B. $l//m$　　C. $m\perp\alpha$　　D. $l\perp m$

9. 若$(2x+1)^{10}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10}$，$x\in\mathbf{R}$，则
$a_0+\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\frac{a_3}{3^3}+\cdots+\frac{a_{10}}{3^{10}}=$（ ）.

A. 7^{10}　　B. $\left(\frac{5}{3}\right)^{10}$　　C. $\left(\frac{7}{3}\right)^{10}$　　D. 1

10. 关于函数$f(x)=x\sin x$，$x\in[-\pi,\pi]$，有下列三个结论：①$f(x)$为偶函数；② $f(x)$有3个零点；③$f\left(\frac{\pi}{4}\right)<f\left(\frac{\pi}{3}\right)$，其中所有正确结论的编号是（ ）.

A. ①②　　B. ①③　　C. ②③　　D. ①②③

11. 已知抛物线C：$x^2=2py(p>0)$的焦点为F，C的准线与对称轴交于点H，直线
$y=\sqrt{3}x-\frac{p}{2}$与C交于A，B两点，若$|AH|=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，则$|AF|=$（ ）.

A. 3　　B. $\frac{8}{3}$　　C. 2　　D. 4

12. 已知函数$f(x)=\begin{cases}\ln x+\dfrac{1+\ln x}{x}-1,x>0\\ 2^x-\dfrac{1}{2},x\leqslant 0\end{cases}$，则满足方程$2f(f(m))+1=2^{f(m)+1}$的实数$m$的取值范围是（ ）.

A. $(-\infty,-1]\cup(0,1]$

B. $(-\infty,1]$

C. $\left(-\infty,-\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right]$

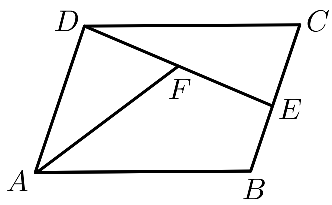
D. $(-\infty,-1]\cup\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}},1\right]$

二、填空题

（本大题共4小题，每小题5分，共20分）

13. 曲线$f(x)=\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{x}$在$x=1$处的切线斜率为 _____ .

14. 如图，在平行四边形$ABCD$中，E为BC的中点，F为DE的中点，若$\overrightarrow{AF}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AD}$，则$n=$ _____ .



15. 已知正项数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}^2=a_n^2+2$，$a_1=\sqrt{2}$，则数列$\left\{\dfrac{1}{a_n+a_{n+1}}\right\}$的前8项和$S_8=$ _____ .

16. 已知双曲线C：$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(b>0)$的左、右顶点分别为$A$、$B$，点$P$在双曲线$C$上，若$\angle PBA=\angle PAB+\dfrac{\pi}{2}$，则双曲线$C$的焦距为 _____ .

三、解答题

（本大题共5小题，每小题12分，共60分）

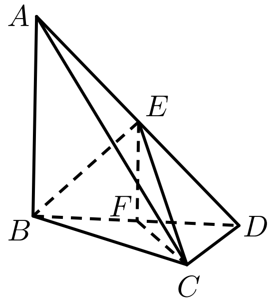
17. 已知$\triangle ABC$的内角A、B、C的对边分别为a、b、c，$\sqrt{3}\sin A\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-A\right)=\cos^2A+\dfrac{1}{2}$.

（1）求角A的大小.

（2）若$\triangle ABC$的面积为$\dfrac{\sqrt{3}}{4}a$，周长为$3a$，求a的值.

18.

如图，在四面体$ABCD$中，E，F分别是线段AD，BD的中点，$\angle ABD=\angle BCD=90^\circ$，$EC=\sqrt{2}$，$AB=BD=2$，直线$EC$与平面$ABC$所成的角等于$30^\circ$.



（1）证明：平面$EFC\perp$平面BCD.

（2）求二面角$A-CE-B$的余弦值.

19. 某省2021年开始将全面实施新高考方案．在6门选择性考试科目中，物理、历史这两门科目采用原始分计分；思想政治、地理、化学、生物这4门科目采用等级转换赋分，将每科考生的原始分从高到低划分为A，B，C，D，E共5个等级，各等级人数所占比例分别为15%、35%、35%、13%和2%，并按给定的公式进行转换赋分．该省组织了一次高一年级统一考试，并对思想政治、地理、化学、生物这4门科目的原始分进行了等级转换赋分.

（1）某校生物学科获得A等级的共有10名学生，其原始分及转换分如下表：

原始分	91	90	89	88	87	85	83	82
转换分	100	99	97	95	94	91	88	86
人数	1	1	2	1	2	1	1	1

现从这10名学生中随机抽取3人，设这3人中生物转换分不低于95分的人数为X，求X的分布列和数学期望.

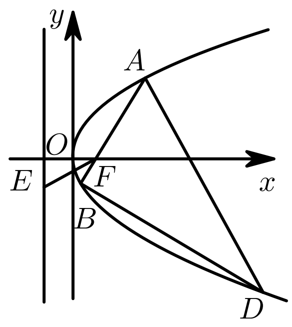
（2）假设该省此次高一学生生物学科原始分Y服从正态分布$N(75.8,36)$．若$Y\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，令$\eta=\dfrac{Y-\mu}{\sigma}$，则$\eta\sim N(0,1)$，请解决下列问题：

① 若以此次高一学生生物学科原始分C等级的最低分为实施分层教学的划线分，试估计该划线分大约为多少分？（结果保留为整数）.

② 现随机抽取了该省800名高一学生的此次生物学科的原始分，若这些学生的原始分相互独立，记ξ为被抽到的原始分不低于71分的学生人数，求$P(\xi=k)$取得最大值时k的值.

附：若$\eta\sim N(0,1)$，则$P(\eta\leqslant 0.8)\approx 0.788$，$P(\eta\leqslant 1.04)\approx 0.85$.

20. 已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点为F，准线为l，过焦点F的直线交C于$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$两点，$y_1y_2=-4$.



（1）求抛物线方程.

（2）点B在准线l上的投影为E，D是C上一点，且$AD\perp EF$，求$\triangle ABD$面积的最小值及此时直线AD的方程.

21. 已知函数$f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}-\dfrac{2a}{x}-2a\ln x$.

（1）讨论函数$f(x)$的单调性.

（2）若函数$f(x)$只有一个零点，求实数a的取值范围.

四、选做题

（本大题共2小题，选做1题，共10分）

选修4-4：坐标系与参数方程

22. 在平面直角坐标系中，曲线C的参数方程为$\begin{cases} x=\dfrac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta} \\ y=2\tan\theta \end{cases}$（$\theta$为参数），以坐标原点为极点，$x$轴的正半轴为极轴建立极坐标系，直线$l$的极坐标方程为$2\rho\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}=0$.

（1）求曲线C的普通方程与直线l的直角坐标方程.

（2）射线$\theta=-\dfrac{\pi}{6}$与曲线C交于点A（异于原点）、与直线l交于点B，求$|AB|$的值.

选修4-5：不等式选讲

23. 已知$a>0$，$b>0$，$a^2+b^2+c^2=4$.

（1）当$c=1$时，求证：$(a+b)\left(a^3+b^3\right)\geqslant 9$.

（2）求$\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{4}{b^2}+\dfrac{1}{c^2+1}$的最小值.