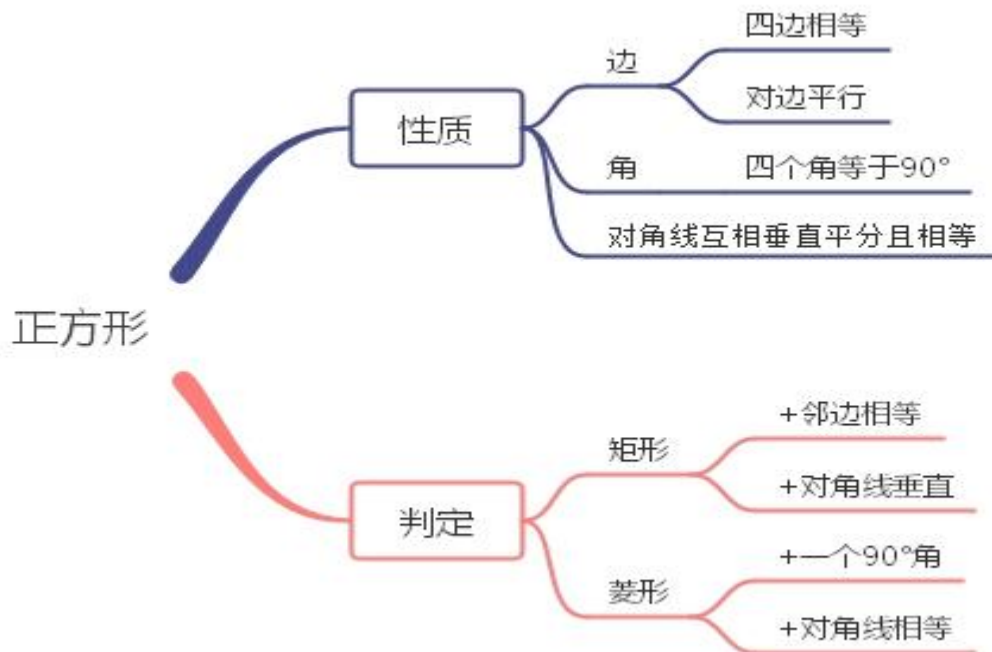


专题 18.2.3 正方形



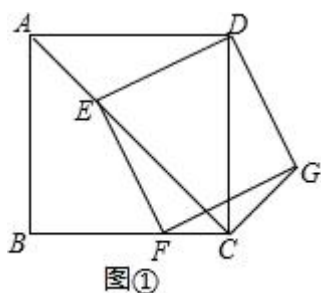
一、知识点



二、考点点拨与训练

考点 1: 应用正方形的性质进行计算求解

典例: (2019·浙江初三开学考试) 如图, 在正方形 ABCD 中, 点 E 与点 F 分别在线段 AC、BC 上, 且四边形 DEFG 是正方形。



(1) 求证 $AE=CG$ ，并说明理由。

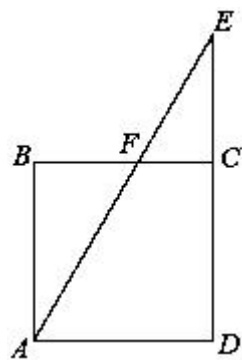
(2) 连接 AG ，若 $AB=17$ ， $DG=13$ ，求 AG 的长。

方法或规律点拨

本题考查正方形的性质、全等三角形的判定（SAS）和性质、勾股定理，解题的关键是掌握正方形的性质、全等三角形的判定（SAS）和性质、勾股定理。

巩固练习

1. (2020·山东初二期末) 如图， $ABCD$ 是正方形场地，点 E 在 DC 的延长线上， AE 与 BC 相交于点 F ，有甲、乙、丙三名同学同时从点 A 出发，甲沿着 $A-B-F-C$ 的路径行走至 C ，乙沿着 $A-F-E-C-D$ 的路径行走至 D ，丙沿着 $A-F-C-D$ 的路径行走至 D ，若三名同学行走的速度都相同，则他们到达各自的目的地先后顺序（由先至后）是（ ）

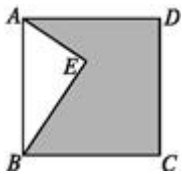


- A. 甲乙丙 B. 甲丙乙 C. 乙丙甲 D. 丙甲乙

2. (2019·山东初三期中) 正方形具有而菱形不一定具有的性质是（ ）

- A. 对角线相等 B. 对角线互相垂直平分
C. 四条边相等 D. 对角线平分一组对角

3. (2019·大石桥市石佛中学初二月考) 如图，已知点 E 在正方形 $ABCD$ 内，满足 $\angle AEB=90^\circ$ ， $AE=6$ ， $BE=8$ ，则阴影部分的面积是（ ）



A. 48

B. 60

C. 76

D. 80

4. (2019·山西初三期末) 正方形具有而菱形不具有的性质是 ()

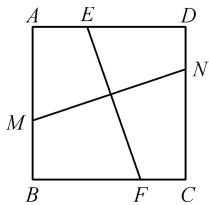
A. 对角线互相平分

B. 对角线相等

C. 对角线平分一组对角

D. 对角线互相垂直

5. (2019·安徽宿城一中宿马分校初三月考) 如图, 正方形 $ABCD$ 内有两条相交线段 MN , EF , M , N , E , F 分别在边 AB , CD , AD , BC 上. 小明认为: 若 $MN=EF$, 则 $MN \perp EF$; 小亮认为: 若 $MN \perp EF$, 则 $MN=EF$, 你认为()



A. 仅小明对

B. 仅小亮对

C. 两人都对

D. 两人都不对

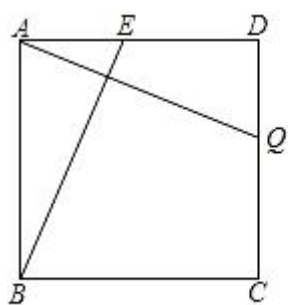
6. (2019·山西初三期中) 在习题课上, 老师让同学们以课本一道习题“如图 1, A , B , C , D 四家工厂分别坐落在正方形城镇的四个角上. 仓库 E 和 Q 分别位于 AD 和 DC 上, 且 $ED=QC$. 证明两条直路 $BE=AQ$ 且 $BE \perp AQ$.”为背景开展数学探究.

(1)独立思考: 将上题条件中的 $ED=QC$ 去掉, 将结论中的 $BE \perp AQ$ 变为条件, 其他条件不变, 那么 $BE=AQ$ 还成立吗? 请写出答案并说明理由;

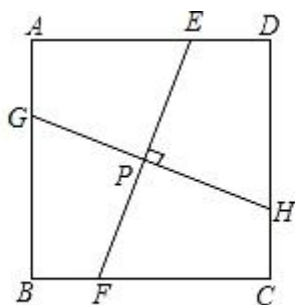
(2)合作交流: “祖冲之”小组的同学受此问题的启发提出: 如图 2, 在正方形 $ABCD$ 内有一点 P , 过点 P 作 $EF \perp GH$, 点 E , F 分别在正方形的对边 AD , BC 上, 点 G , H 分别在正方形的对边 AB , CD 上, 那么 EF 与 GH 相等吗? 并说明理由.

(3)拓展应用: “杨辉”小组的同学受“祖冲之”小组的启发, 想到了利用图 2 的结论解决以下问题:

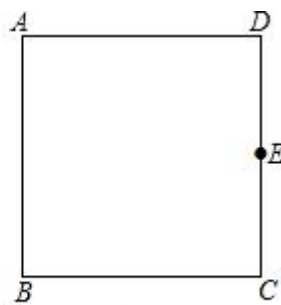
如图 3, 将边长为 10cm 的正方形纸片 $ABCD$ 折叠, 使点 A 落在 DC 的中点 E 处, 折痕为 MN , 点 N 在 BC 边上, 点 M 在 AD 边上. 请你画出折痕, 则折痕 MN 的长是_____; 线段 DM 的长是_____.



(图1)

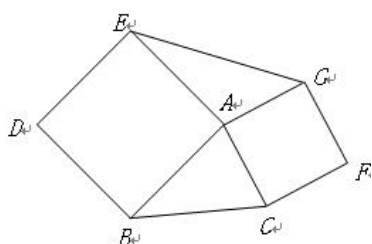


(图2)

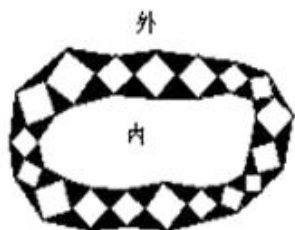


(图3)

7. (2020·全国初一课时练习) (1) 如图, 以 $\triangle ABC$ 的边 AB 、 AC 向外作正方形 $ABDE$ 和正方形 $ACFG$, 试判断 $\triangle ABC$ 与 $\triangle AEG$ 面积之间的关系, 并说明理由.



(2) 园林小路, 曲径通幽, 如图 2 所示, 小路由白色的正方形理石和黑色的三角形理石铺成. 已知中间的所有正方形的面积之和是 a 平方米, 内圈的所有三角形的面积之和是 b 平方米, 这条小路一共占地多少平方米.



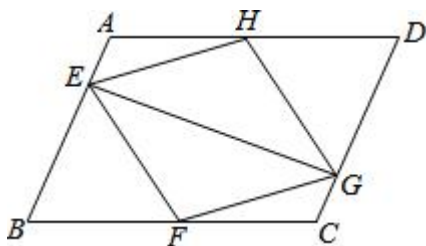
(图 2)

考点 2: 正方形的判定

典例: (2020·广东初三期末) 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E , F , G , H 分别在边 AB , BC , CD , DA 上, $AE=CG$, $AH=CF$, 且 EG 平分 $\angle HEF$.

(1) 求证: $\triangle AEH \cong \triangle CGF$.

(2) 若 $\angle EFG=90^\circ$. 求证: 四边形 $EFGH$ 是正方形.

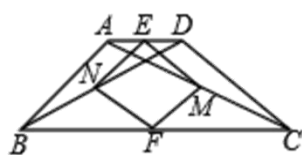


方法或规律点拨

本题主要考查了四边形的综合性问题，关键要注意正方形和菱形的性质定理，结合考虑三角形的全等的证明，这是中考的必考点，必须熟练掌握.

巩固练习

1. (2020·山东初三期末) 如图, AC , BD 是四边形 $ABCD$ 的对角线, 点 E , F 分别是 AD , BC 的中点, 点 M , N 分别是 AC , BD 的中点, 连接 EM , MF , FN , NE , 要使四边形 $EMFN$ 为正方形, 则需添加的条件是 ()



- A. $AB = CD$, $AB \perp CD$ B. $AB = CD$, $AD = BC$
C. $AB = CD$, $AC \perp BD$ D. $AB = CD$, $AD \parallel BC$
2. (2019·北京北大附中初二期中) 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle A = \angle B = \angle C = 90^\circ$, 如果再添加一个条件, 即可推出该四边形是正方形, 这个条件可以是 ()

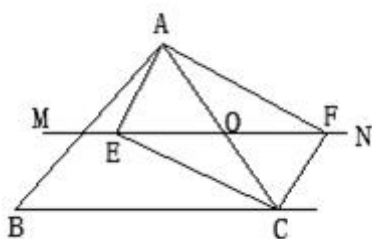
- A. $BC = CD$ B. $AB = CD$ C. $\angle D = 90^\circ$ D. $AD = BC$

3. (2020·广东初三期中) 如图, $\triangle ABC$ 中, 点 O 为 AC 边上的一个动点, 过点 O 作直线 $MN \parallel BC$, 设 MN 交 $\angle BCA$ 的外角平分线 CF 于点 F , 交 $\angle ACB$ 内角平分线 CE 于 E

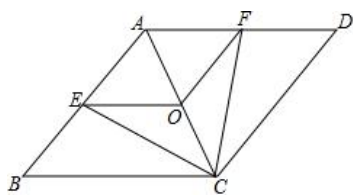
(1) 求证: $EO = FO$;

(2) 当点 O 运动到何处时, 四边形 $AECF$ 是矩形? 并证明你的结论;

(3) 若 AC 边上存在点 O , 使四边形 $AECF$ 是正方形, 猜想 $\triangle ABC$ 的形状并证明你的结论.



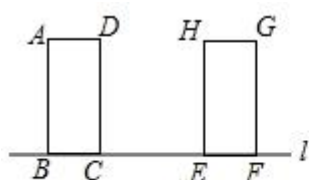
4. (2020·全国初二课时练习) 已知: 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, 点 E , O , F 分别为 AB , AC , AD 的中点, 连接 CE , CF , OE , OF .



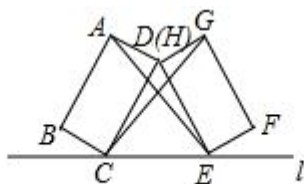
(1) 求证: $\triangle BCE \cong \triangle DCF$;

(2) 当 AB 与 BC 满足什么关系时, 四边形 $AEOF$ 是正方形? 请说明理由.

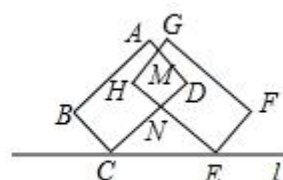
5. (2019·河南省实验中学初三月考) 两个长为 2cm , 宽为 1cm 的长方形, 摆放在直线 l 上 (如图①), $CE = 2\text{cm}$, 将长方形 $ABCD$ 绕着点 C 顺时针旋转 α 角, 将长方形 $EFGH$ 绕着点 E 逆时针旋转相同的角度.



图①



图②

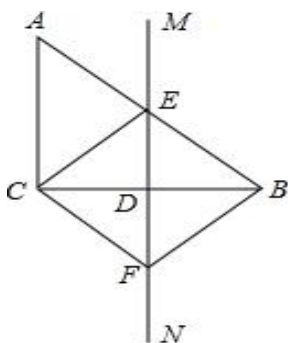


图③

(1) 当旋转到顶点 D, H 重合时, 连接 AE, CG , 求证: $\triangle AED \cong \triangle GCD$ (如图②)

(2) 当 $\alpha = 45^\circ$ 时 (如图③), 求证: 四边形 $MHND$ 为正方形.

6. (2019·广东初三月考) 如图, 在直角 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, BC 的垂直平分线 MN 交 BC 于点 D , 交 AB 于点 E , $CF \parallel AB$ 交 MN 于点 F , 连接 CE, BF .



(1) 求证: $\triangle BED \cong \triangle CFD$;

(2) 求证: 四边形 $BECF$ 是菱形.

(3) 当 $\angle A$ 满足什么条件时, 四边形 $BECF$ 是正方形, 请说明理由.

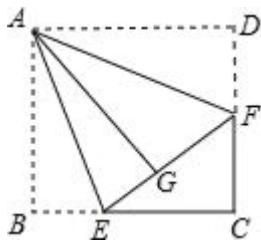
考点 3: 与正方形有关的折叠问题

典例: (2019·广东初三期中) 如图, 在四边形纸片 $ABCD$ 中, $\angle B = \angle D = 90^\circ$, 点 E, F 分别在边 BC, CD 上, 将 AB, AD 分别沿 AE, AF 折叠, 点 B, D 恰好都和点 G 重合, $\angle EAF = 45^\circ$.

(1) 求证: 四边形 $ABCD$ 是正方形;

(2) 求证：三角形 ECF 的周长是四边形 ABCD 周长的一半；

(3) 若 $EC=FC=1$ ，求 AB 的长度．

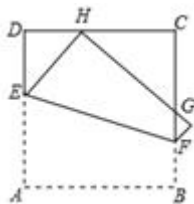


方法或规律点拨

本题考查了翻折变换的知识，解答本题的关键是熟练掌握翻折变换的性质：翻折前后对应边相等，另外要求同学们熟练掌握勾股定理的应用．

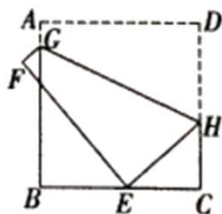
巩固练习

- (2020·深圳市龙岗区石芽岭学校初三月考) 如图，将正方形 ABCD 折叠，使点 A 与 CD 边上的点 H 重合 (H 不与 C, D 重合)，折痕交 AD 于点 E，交 BC 于点 F，边 AB 折叠后与边 BC 交于点 G. 设正方形 ABCD 周长为 m ， $\triangle CHG$ 周长为 n ，则 $\frac{n}{m}$ 的值为 ()



- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

- (2020·河南初三期末) 如图，正方形 ABCD 的面积为 81，点 H 是边 DC 上的一个动点，沿过点 H 的直线 GH 将正方形折叠，使顶点 D 恰好落在 BC 边上的三等分点 E 处，则线段 DH 的长是_____



- (2019·山东初三期中) 已知矩形 ABCD 的一条边 $AD=4$ ，将矩形 ABCD 折叠，使得顶点 B 落在边上的 P 点处.

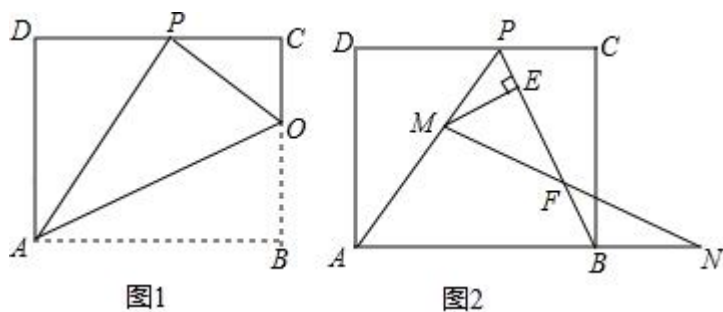
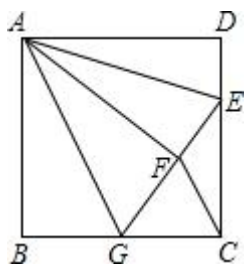


图1

图2

- (1) 如图1, 已知折痕与边 BC 交于点 O , 连结 AP 、 OP 、 OA . 求证: $\triangle OCP \sim \triangle PDA$;
- (2) 若 $\triangle OCP$ 与 $\triangle PDA$ 的面积比为 $1:4$, 求边 AB 的长;
- (3) 如图2, 在(1)(2)的条件下, 擦去折痕 AO 线段 OP , 连结 BP , 动点 M 在线段 AP 上 (点 M 与点 P 、 A 不重合), 动点 N 在线段 AB 的延长线上, 且 $BN = PM$, 连结 MN 交 PB 于点 F , 作 $ME \perp BP$ 于点 E . 试问当点 M 、 N 在移动过程中, 线段 EF 的长度是否发生变化? 若变化, 说明理由; 若不变, 求出线段 EF 的长度.

4. (2019·利川市建南民族初级中学初二月考) 如图, 正方形 $ABCD$ 中, $AB = 6$, 点 E 在 CD 上, 且 $CD = 3DE$, 将 $\triangle ADE$ 沿 AE 对折至 $\triangle AFE$, 延长 EF 交 BC 于点 G , 连接 AG 、 CF .



- (1) 求证: $\triangle ABG \cong \triangle AFG$;
- (2) 求 BG 的长;
- (3) 求 $\triangle FGC$ 的面积.

5. (2018·成都市树德实验中学西区初二月考) 如图, 有一张边长为 6 的正方形纸片 $ABCD$, P 是 AD 边上一点 (不与点 A 、 D 重合), 将正方形纸片沿 EF 折叠, 使点 B 落在点 P 处, 点 C 落在点 G 处, PG 交 DC 于 H , 连接 BP .



(3) 当点 P 在边 AD 上移动时, $\triangle PDH$ 的周长是否发生变化? 写出你的结论并证明.

(2) 求 $\frac{HG}{HC}$ 的值.

(1) 当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到如图 1 的位置时, 求证: $BM+DN=MN$;

(3) 当 $\angle MAN$ 绕点 A 旋转到如图 3 的位置时, 猜想线段 BM , DN 和 MN 之间又有怎样的数量关系呢? 并对你的猜想加以说明.

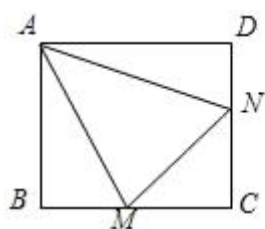


图 1

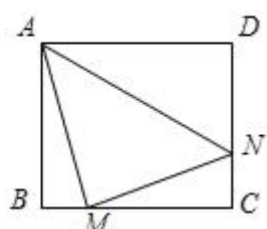


图 2

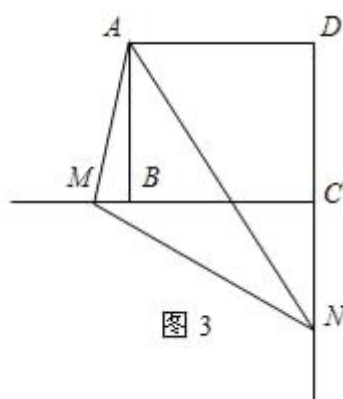


图 3

方法或规律点拨

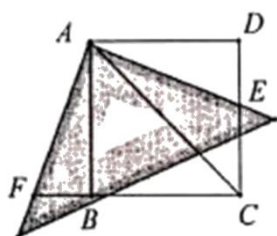
本题为四边形的综合应用，涉及知识点有正方形的性质、全等三角形的判定和性质、垂直平分线的判定和性质，本题考查知识点不多，但三角形全等的构造难度较大。

巩固练习

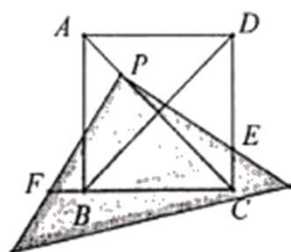
1. (2020·山西初三期末) 综合与实践：

问题情境：已知 AC 是正方形 $ABCD$ 的对角线，将直角三角尺放在正方形 $ABCD$ 上。

(1) 如图 1，使三角尺的直角顶点与点 A 重合，三角尺的一条直角边交直线 CD 于点 E ，另一条直角边交直线 CB 于点 F 。求证： $AF = AE$ 。



(图 1)



(图 2)

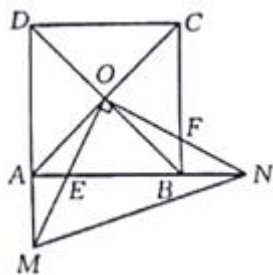
操作发现：

(2) 如图 2，将三角尺的直角顶点 P 放在 AC 上，三角尺的一条直角边交直线 CD 于点 E ，另一条直角边交直线 CB 于点 F 。判断 PE 和 PF 的数量关系，并说明理由。

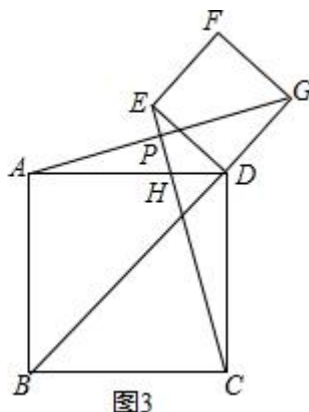
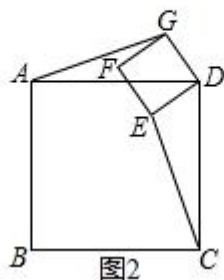
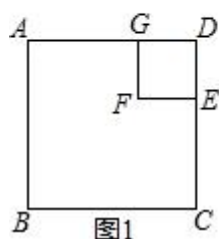
2. (2020·山东初二期末) 如图，正方形 $ABCD$ 的对角线交于点 O 。点 E, F 分别在 AB, BC 上 ($AE < BE$) 且 $\angle EOF = 90^\circ$ ， OE ， DA 的延长线交于点 M ， OF ， AB 的延长线交于点 N ，连接 MN 。

(1) 求证： $OM = ON$ 。

(2) 若正方形 $ABCD$ 的边长为 4， E 为 OM 的中点，求 MN 的长。



3. (2019·湖北初三期中) 如图 1, 若四边形 $ABCD$ 、 $GFED$ 都是正方形, 显然图中有 $AG=CE$, $AG \perp CE$.



(1) 当正方形 $GFED$ 绕 D 旋转到如图 2 的位置时, $AG=CE$ 是否成立? 若成立, 请给出证明, 若不成立, 请说明理由;

(2) 当正方形 $GFED$ 绕 D 旋转到 B, D, G 在一条直线 (如图 3) 上时, 连结 CE , 设 CE 分别交 AG 、 AD 于 P 、 H .

①求证: $AG \perp CE$;

②如果, $AD=2\sqrt{5}$, $DG=\sqrt{10}$, 求 CE 的长.

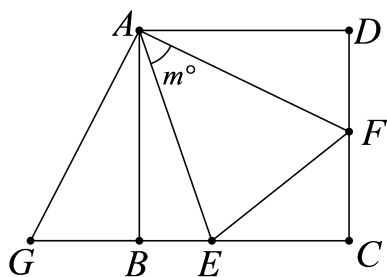
4. (2019·海南省海口市海南白驹学校初三) 如图, 已知正方形 $ABCD$ 的边长是 2, $\angle EAF = m^\circ$, 将 $\angle EAF$ 绕点 A 顺时针旋转, 它的两边分别交 BC 、 CD 于点 E 、 F , G 是 CB 延长线上一点, 且始终保持 $BG = DF$.

(1) 求证: $\triangle ABG \cong \triangle ADF$;

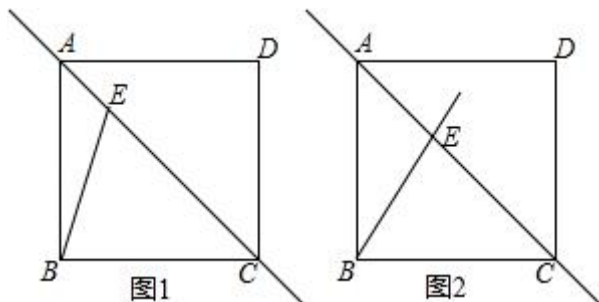
(2) 求证: $AG \perp AF$;

(3) 当 $EF = BE + DF$ 时:

①求 m 的值; ②若 F 是 CD 的中点, 求 BE 的长.



5. (2017·北京初三) 在正方形 $ABCD$ 中, 点 E 是对角线 AC 上的动点 (与点 A, C 不重合), 连接 BE .



(1) 将射线 BE 绕点 B 顺时针旋转 45° , 交直线 AC 于点 F .

①依题意补全图 1;

②小研通过观察、实验, 发现线段 AE , FC , EF 存在以下数量关系:

AE 与 FC 的平方和等于 EF 的平方. 小研把这个猜想与同学们进行交流, 通过讨论, 形成证明该猜想的几种想法:

想法 1: 将线段 BF 绕点 B 逆时针旋转 90° , 得到线段 BM , 要证 AE, FC, EF 的关系, 只需证 AE, AM, EM 的关系.

想法 2: 将 $\triangle ABE$ 沿 BE 翻折, 得到 $\triangle NBE$, 要证 AE, FC, EF 的关系, 只需证 EN, FN, EF 的关系.

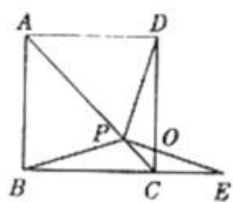
...

请你参考上面的想法, 用等式表示线段 AE, FC, EF 的数量关系并证明; (一种方法即可)

(2) 如图 2, 若将直线 BE 绕点 B 顺时针旋转 135° , 交直线 AC 于点 F . 小研完成作图后, 发现直线 AC 上存在三条线段 (不添加辅助线) 满足: 其中两条线段的平方和等于第三条线段的平方, 请直接用等式表示这三条线段的数量关系.

考点 5: 利用正方形的轴对称性解题

典例: (2019·广东初三期中) 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, P 是对角线 AC 上的一点, 点 E 在 BC 的延长线上, 且 $PE=PB$, PE 与 DC 交于点 O .

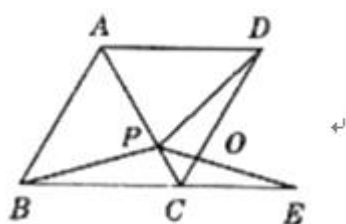


(基础探究)

(1) 求证: $PD=PE$.

(2) 求证: $\angle DPE=90^\circ$

(3) (应用拓展) 把正方形 $ABCD$ 改为菱形, 其他条件不变(如图), 若 $PE=3$, 则 $PD=$ _____;
若 $\angle ABC=62^\circ$, 则 $\angle DPE=$ _____.

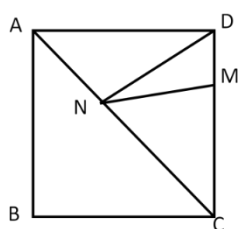


方法或规律点拨

本题考查了正方形的性质、全等三角形的判定与性质、菱形的性质、等边对等角的性质, 熟练运用性质证得 $\angle PDC=\angle E$ 是解题的关键.

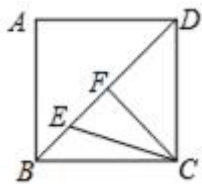
巩固练习

1. (2019·黑龙江初二期末) 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 8, 点 M 在 DC 上, 且 $DM=2$, N 是 AC 上一动点, 则 $DN+MN$ 的最小值为 ()

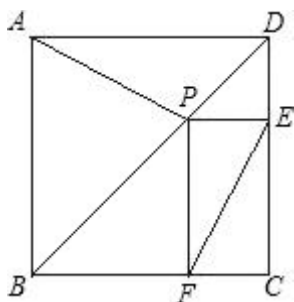


- A. 8 B. $8\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{7}$ D. 10

2. (2019·江苏初三) 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 6, E, F 是对角线 BD 上的两个动点, 且 $EF=\frac{x_1}{x_2}$, 连接 CE, CF , 则 $\triangle CEF$ 周长的最小值为_____.



3. (2019·南通市八一中学初二月考) 如图, P 是正方形 $ABCD$ 对角线 BD 上一点, $PE \perp DC$, $PF \perp BC$, E 、 F 分别为垂足, 若 $CF = 3$, $CE = 4$, 求 AP 的长.



4. (2019·浙江初三开学考试) 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, G 是对角线 BD 上的点, $GE \perp CD$, $GF \perp BC$, E 、 F 分别为垂足, 连结 EF . 设 M 、 N 分别是 AB 、 BG 的中点, $EF = 5$, 求 MN 的长.

