绝密★启封并使用完毕前 **试题类型：A**

2021 年深圳市高三第一次调研考试

数学试题答案及评分参考

一、单项选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	A	B	A	D	C	B	C

二、多项选择题：

题号	9	10	11	12
答案	AC	BC	BD	ABD

12. 解析：（1）考查选项 A：若 $CD//$ 平面 xOy，考虑以下特殊情形：

①当点 B 与坐标原点 O 重合时，S 为正方形；

②当点 A 与坐标原点 O 重合时，S 为三角形，故选项 A 正确；

（2）考查选项 B：若点 A 与坐标原点 O 重合，即 AB 在 z 轴上，

易知 $CD//$ 平面 xOy，且 S 为三角形，

不难知道其面积为 $\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，故选项 B 正确；

（3）考查选项 C：当 $OA=OB=OC$，且点 O 在正四面体 $ABCD$ 外部时，

则点 D 恰好为以 OA，OB，OC 为棱的正方体的一个顶点，

$\because AB=1$，$\therefore OA=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore S$ 是边长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的正方形，其面积为 $\frac{1}{2}$，故选项 C 错误；

（不难知道当 $OA=OB=OC$，且点 O 在正四面体 $ABCD$ 内部时，S 为三角形，且其面积为 $\frac{5}{12}$）

（4）考查选项 D：设 AB 的中点为 M，则 $OM=\frac{1}{2}$，且 $MD=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

易知 $OD\le OM+MD=\frac{1+\sqrt{3}}{2}<\frac{3}{2}$，即 $OD<\frac{3}{2}$，

$\therefore$ 点 D 到坐标原点 O 的距离小于 $\frac{3}{2}$，故选项 D 正确；

综上所述，应选 A、B、D.

三、填空题：

13. $f(x)=x^2+\frac{1}{4}$（答案不唯一）； 14. 8； 15. 6； 16. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}$.

13. 解析：$f(x)=x^2+\dfrac{1}{4}$，或 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{2}$，或 $f(x)=-\dfrac{x^2+1}{2}$ 等(只需 $f(x)=ax^2+c$ 满足 $ac=\dfrac{1}{4}$ 即可)

16. 解析：不妨设 $BC=a$，$AC=b$，

若 $\angle ACB=30^\circ$，则由正弦定理可得 $\dfrac{AB}{\sin 30^\circ}=2$，故 $AB=1$，

$\therefore$ 由余弦定理得 $1=a^2+b^2-2ab\cos 30^\circ=a^2+b^2-\sqrt{3}ab\ge(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2})(a^2+b^2)$，

$\therefore$ $a^2+b^2\le 4+2\sqrt{3}$，

显然△ $A'B'C'$ 为由△ ABC 所得到的拿破仑三角形(等边三角形)，设其边长为 x，

易知 $\angle A'CB'=90^\circ$，且 $A'C=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$，$B'C=\dfrac{\sqrt{3}}{3}b$，

$\therefore$ $x^2=(\dfrac{\sqrt{3}}{3}a)^2+(\dfrac{\sqrt{3}}{3}b)^2=\dfrac{1}{3}(a^2+b^2)$，

$\therefore$ △ $A'B'C'$ 的面积 $S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2=\dfrac{\sqrt{3}}{12}(a^2+b^2)\le\dfrac{\sqrt{3}}{12}\times(4+2\sqrt{3})=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

显然可取等号，即△ $A'B'C'$ 的面积最大值为 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，故应填 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

四、解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n，满足 $S_{n+1}=\dfrac{S_n}{1+2S_n}$，且 $a_1=1$.

（1）证明：数列 $\{\dfrac{1}{S_n}\}$ 为等差数列；

（2）求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解：（1）由 $S_{n+1}=\dfrac{S_n}{1+2S_n}$，得 $\dfrac{1}{S_{n+1}}=\dfrac{1+2S_n}{S_n}$， ……………………………………………2 分

$\dfrac{1}{S_{n+1}}-\dfrac{1}{S_n}=2$，$\dfrac{1}{S_1}=\dfrac{1}{a_1}=1$，

故数列 $\{\dfrac{1}{S_n}\}$ 是首项为 1，公差为 2 的等差数列. ……………………………………………4 分

（2）由（1）知 $\dfrac{1}{S_n}=1+(n-1)\times 2=2n-1$，

则 $S_n=\dfrac{1}{2n-1}$， ……………………………………………………………………………………6 分

当 $n\ge 1$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n-3}=-\dfrac{2}{(2n-1)(2n-3)}$， ………………………8 分

故$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\begin{cases}1, & n=1, \\ -\dfrac{2}{(2n-1)(2n-3)}, & n>1.\end{cases}$ ……………………………………10 分

【命题意图】本题主要考查等差数列的定义和通项公式，以及a_n与S_n的关系，考察了学生的数学运算，逻辑推理等核心素养.

18．（12 分）

$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c， 已知A为锐角，$\sin B-\cos C=\dfrac{c^2-a^2}{2ab}$.

（1）求A；

（2）若$b=\dfrac{\sqrt{3}}{4}c$，且BC边上的高为$2\sqrt{3}$，求$\triangle ABC$的面积.

解：（1）$\because \sin B-\cos C=\dfrac{c^2-a^2}{2ab}$，

$\therefore 2ab\sin B=c^2-a^2+2ab\cos C$， ……………………………………1 分

由余弦定理，得$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，

$\therefore 2ab\sin B=b^2$，

$\therefore 2a\sin B=b$， ……………………………………2 分

由正弦定理，得$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，

$\therefore 2\sin A\sin B=\sin B$，

又$\because B\in(0,\pi)$，即$\sin B\neq 0$，

$\therefore \sin A=\dfrac{1}{2}$， ……………………………………4 分

$\because$角A为锐角，

$\therefore A=\dfrac{\pi}{6}$. ……………………………………6 分

（2）$\because BC$边上的高为$2\sqrt{3}$，

$\therefore \triangle ABC$的面积$S=\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot 2\sqrt{3}=\sqrt{3}a$， ……………………………………7 分

又$\triangle ABC$的面积$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{bc}{4}$，

$\therefore \dfrac{bc}{4}=\sqrt{3}a$，即$bc=4\sqrt{3}a$， ……………………………………8 分

又$\because b=\dfrac{\sqrt{3}}{4}c$，

$\therefore c^2=16a$，且$b^2=\dfrac{3}{16}c^2=3a$，……………………………………………………………10 分

在△ABC中，由余弦定理，得$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{3a+16a-a^2}{2\times 4\sqrt{3}a}=\dfrac{19-a}{8\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

解得$a=7$，………………………………………………………………………………11 分

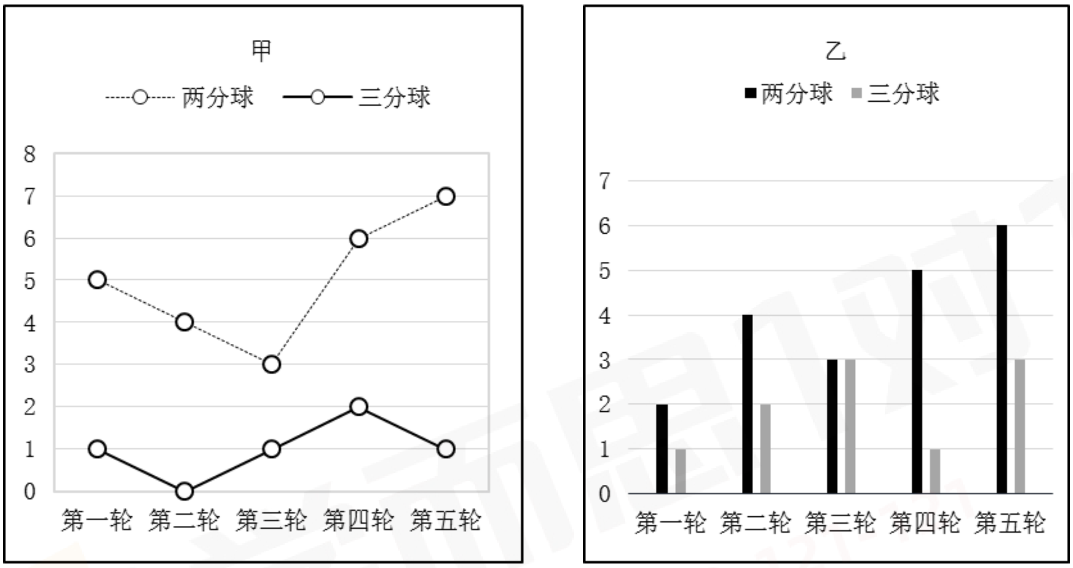
$\therefore S=\sqrt{3}a=7\sqrt{3}$，即△$ABC$的面积为$7\sqrt{3}$．………………………………………………12 分

【命题意图】本题主要考察正弦定理，余弦定理等知识，意在考察考生方程、转化与化归思想，考察了学生的逻辑推理，数学运算等核心素养．

19．（12 分）

某校将进行篮球定点投篮测试，规则为：每人至多投3次，先在M处投一次三分球，投进得3分，未投进不得分，以后均在N处投两分球，每投进一次得2分，未投进不得分．测试者累计得分高于3分即通过测试，并终止投篮．

甲、乙两位同学为了通过测试，进行了五轮投篮训练，每人每轮在M处和N处各投10次，根据他们每轮两分球和三分球的命中次数分别得到如下图表：



（第 19 题图）

若以每人五轮投篮训练命中频率的平均值作为其测试时每次投篮命中的概率．

（1）求甲同学通过测试的概率；

（2）若甲、乙两位同学均通过了测试，求甲得分比乙得分高的概率．

解：（1）甲同学两分球投篮命中的概率为$\dfrac{\frac{5}{10}+\frac{4}{10}+\frac{3}{10}+\frac{6}{10}+\frac{7}{10}}{5}=0.5$，…………………………1 分

甲同学三分球投篮命中的概率为$\dfrac{\frac{1}{10}+0+\frac{1}{10}+\frac{2}{10}+\frac{1}{10}}{5}=0.1$，………………………………2 分

设甲同学累计得分为X，

则 $P(X\ge 4)=P(X=4)+P(X=5)=0.9\times 0.5\times 0.5+0.1\times 0.5+0.1\times 0.5\times 0.5=0.3$

∴甲同学通过测试的概率为 0.3. ……………………………………………………………5 分

（2）同（1）可求，乙同学两分球投篮命中的概率为 0.4，三分球投篮命中的概率为 0.2， ……7 分

设乙同学累计得分为 Y，则

$P(Y=4)=0.8\times 0.4\times 0.4=0.128$， ……………………………………………………8 分

$P(Y=5)=0.2\times 0.4+0.2\times 0.6\times 0.4=0.128$， ………………………………………9 分

设“甲得分比乙得分高”为事件 A，“甲、乙两位同学均通过了测试”为事件 B，

则 $P(AB)=P(X=5)\cdot P(Y=4)=0.075\times 0.128=0.0096$， ……………………………10 分

$P(B)=[P(X=4)+P(X=5)]\cdot[P(Y=4)+P(Y=5)]=0.0768$， ……………………………11 分

由条件概率公式可得，$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{0.0096}{0.0768}=\dfrac{1}{8}$. ……………………………12 分

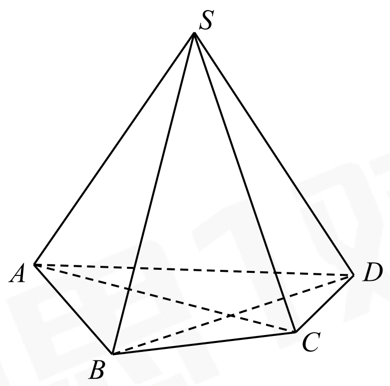
【命题意图】本题以体育运动为背景，通过频率与概率定义以及条件概率公式等知识点，考查学生数学建模、数学运算、逻辑推理等数学核心素养，体现分类讨论的数学思想.

20.（12 分）

如图，在四棱锥 $S-ABCD$ 中，$SA=SB=SC=SD=13$，$AC\perp CD$，$AB=6$，$BD=8$.

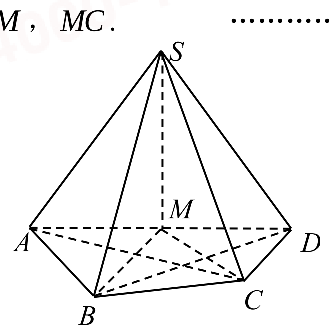
（1）求证：平面 $SAD\perp$ 平面 $ABCD$；

（2）求二面角 $A-SB-D$ 的余弦值.



（第 20 题图）

解：（1）证明： 如图所示，取 AD 的中点 M，连接 SM，MC. ………………………1 分



∵ $SA=SD$，

∴ $SM\perp AD$.

∵ $AC\perp CD$，

∴△ ACD 是直角三角形，

∴ $CM=\dfrac{1}{2}AD$，

∴ $AM=CM=DM$.

∵ $SA=SC$，

$\therefore \text{Rt}\triangle SAM \cong \text{Rt}\triangle SCM$， ……………………………………………………………………3 分

$\therefore \angle CMS = \angle AMS = \dfrac{\pi}{2}$，

$\because AM \cap CM = M$，

$\therefore SM \perp$ 平面 $ABCD$，

又 $\because SM \subset$ 平面 SAD，

$\therefore$ 平面 $SAD \perp$ 平面 $ABCD$. ……………………………………………………………………5 分

（2）由（1）可知，$SM \perp$ 平面 $ABCD$，

$\therefore \angle BMS = \angle AMS = \dfrac{\pi}{2}$，

又 $\because SA = SB$，

$\therefore \text{Rt}\triangle SAM \cong \text{Rt}\triangle SBM$，

$\therefore BM = AM$，

$\therefore A$，B，C，D 四点共圆，

$\therefore AB \perp BD$. ……………………………………………………………………6 分

$\because AB = 6$，$BD = 8$，

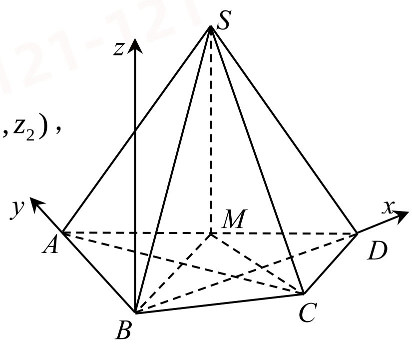
$\therefore AD = 10$，

$\therefore AM = 5$，

又 $\because SA = 13$，

$\therefore SM = 12$. ……………………………………………………………………7 分

（解法一）以 B 为坐标原点，BD 为 x 轴，BA 为 y 轴，过点 B 平行于 SM 的直线为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，易得 $B(0,0,0)$，$D(8,0,0)$，$A(0,6,0)$，$S(4,3,12)$， ……………………8 分



则有 $\overrightarrow{BS} = (4,3,12)$，$\overrightarrow{BA} = (0,6,0)$，$\overrightarrow{BD} = (8,0,0)$，

分别设平面 ABS 和平面 DBS 的法向量为 $\overline{m} = (x_1, y_1, z_1)$ 和 $\overline{n} = (x_2, y_2, z_2)$，

则 $\begin{cases} \overrightarrow{BA} \cdot \overline{m} = 0, \\ \overrightarrow{BS} \cdot \overline{m} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 6y_1 = 0, \\ 4x_1 + 3y_1 + 12z_1 = 0, \end{cases}$ ……………………9 分

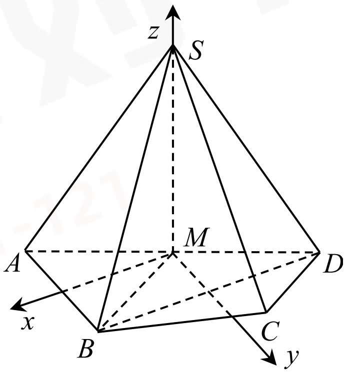
则平面 ABS 的一个法向量为 $\overline{m} = (3,0,-1)$，

同理，平面 DBS 的一个法向量为 $\overline{n} = (0,4,-1)$， ……………………………………10 分

$\cos < \overline{m}, \overline{n} > = \dfrac{\overline{m} \cdot \overline{n}}{|\overline{m}| \cdot |\overline{n}|} = \dfrac{1}{\sqrt{10} \times \sqrt{17}} = \dfrac{\sqrt{170}}{170}$， ……………………………………11 分

设二面角 $A-SB-D$ 的平面角为 θ，则 $\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{170}}{170}$. ……………………………………………12 分

（解法二）以 M 为坐标原点，过点 M 平行于 DB 的直线为 x 轴，平行于 AB 的直线为 y 轴，MS 为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，易得 $B(4,3,0)$，$D(-4,3,0)$，$A(4,-3,0)$，$S(0,0,12)$， ……8 分



则有 $\overrightarrow{BS}=(-4,-3,12)$，$\overrightarrow{BA}=(0,-6,0)$，$\overrightarrow{BD}=(-8,0,0)$，

分别设平面 ABS 和平面 DBS 的法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$ 和 $\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{BA}\cdot\vec{m}=0,\\ \overrightarrow{BS}\cdot\vec{m}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-6y_1=0,\\ -4x_1-3y_1+12z_1=0,\end{cases}$ ……………………………9 分

则平面 ABS 的一个法向量为 $\vec{m}=(3,0,1)$，

同理，平面 DBS 的一个法向量为 $\vec{n}=(0,4,1)$， ……………………………………………………10 分

$\cos<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{10}\times\sqrt{17}}=\dfrac{\sqrt{170}}{170}$， …………………………………………………11 分

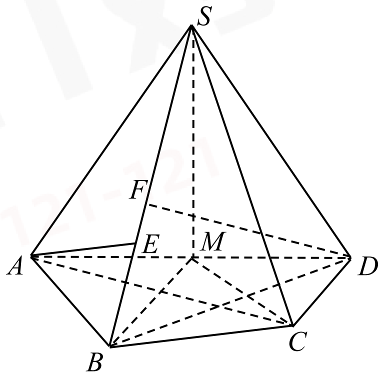
设二面角 $A-SB-D$ 的平面角为 θ，则 $\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{170}}{170}$. ……………………………………12 分

（解法三）如图所示，过点 A，D 分别作 SB 的垂线，并交 SB 于点 E，F. ……………8 分

在等腰△ SAB 中，由 $AB^2-BE^2=AS^2-SE^2$，

得 $6^2-BE^2=13^2-(13-BE)^2$，解得 $BE=\dfrac{18}{13}$，

在 Rt △ EAB 中，由 $AE^2=AB^2-BE^2=6^2-(\dfrac{18}{13})^2=\dfrac{36\times160}{13^2}$， ……………………………9 分



同理，$BF=\dfrac{32}{13}$，$FD^2=\dfrac{64\times153}{13^2}$，

则 $EF=BF-BE=\dfrac{14}{13}$， ……………………………………10 分

由 $\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FD}$，

可得 $\overrightarrow{AD}^2=(-\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FD})^2=\overrightarrow{EA}^2+\overrightarrow{EF}^2+\overrightarrow{FD}^2-2\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{FD}$，

则 $10^2=\dfrac{36\times160}{13^2}+(\dfrac{14}{13})^2+\dfrac{64\times153}{13^2}-2\times\sqrt{\dfrac{36\times160}{13^2}}\times\sqrt{\dfrac{64\times153}{13^2}}\cos<\overrightarrow{EA},\overrightarrow{FD}>$，

解得 $\cos<\overrightarrow{EA},\overrightarrow{FD}>=-\dfrac{\sqrt{170}}{170}$， ………………………………………………11 分

易知二面角 $A-SB-D$ 的平面角就是 $\overrightarrow{EA}$ 与 $\overrightarrow{FD}$ 的夹角，

设二面角 $A-SB-D$ 的平面角为 θ，则 $\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{170}}{170}$. ……………………………………12 分

【命题意图】本题主要考察线面垂直的判定与性质，面面垂直的判定，空间向量，二面角的平面角. 涉

及到的思想方法主要有向量法，数形结合思想，等价转化思想. 考察了学生的直观想象，逻辑推理，数学运算等核心素养.

21.（12 分）

设O是坐标原点，以F_1，F_2为焦点的椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的长轴长为$2\sqrt{2}$，以$|F_1F_2|$为直径的圆和$C$恰好有两个交点.

（1）求C的方程；

（2）P是C外的一点，过P的直线l_1，l_2均与C相切，且l_1，l_2的斜率之积为$m(-1\le m\le -\dfrac{1}{2})$，记$u$为$|PO|$的最小值，求$u$的取值范围.

解：（1）由题意，$2a=2\sqrt{2}$，

$\therefore a=\sqrt{2}$， ……………………………………………………………………1 分

又$\because$以$|F_1F_2|$为直径的圆和C恰好有两个交点，

即$b=c$， ……………………………………………………………………2 分

又$\because b^2+c^2=a^2=2$，

$\therefore b=c=1$， ……………………………………………………………………3 分

$\therefore C$的方程为$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$. ……………………………………………………4 分

(解法一)由题意，l_1，l_2的斜率存在且不为零，设过点$P(x_0,y_0)$的切线$l:y-y_0=k(x-x_0)$，

由方程组$\begin{cases} y-y_0=k(x-x_0), \\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1, \end{cases}$ 消去y，

并整理得$(1+2k^2)x^2+4k(y_0-kx_0)x+2(y_0-kx_0)^2-2=0$， ……………………………6 分

$\because l$与C相切，

$\therefore \Delta=16k^2(y_0-kx_0)^2-8(1+2k^2)((y_0-kx_0)^2-1)=0$， ……………………………7 分

化简并整理，得$(y_0-kx_0)^2=2k^2+1$，

整理成关于k的一元二次方程得$({x_0}^2-2)k^2-2x_0y_0k+{y_0}^2-1=0$，（易知$x_0\ne\pm\sqrt{2}$） ……8 分

设l_1，l_2的斜率分别为k_1，k_2，

易知k_1，k_2为方程$({x_0}^2-2)k^2-2x_0y_0k+{y_0}^2-1=0$的两根，

$\therefore k_1\cdot k_2=\dfrac{{y_0}^2-1}{{x_0}^2-2}=m$，

$\therefore y_0{}^2 = mx_0{}^2 + 1 - 2m$,

$\therefore x_0{}^2 + y_0{}^2 = (1+m)x_0{}^2 + 1 - 2m$, ……………………………………10 分

$\therefore |PO| = \sqrt{x_0{}^2 + y_0{}^2} = \sqrt{(1+m)x_0{}^2 + 1 - 2m}$,

易知当 $x_0 = 0$ 时，有 $u = |PO|_{\min} = \sqrt{1-2m}$, ……………………………………………11 分

又$\because -1 \le m \le -\dfrac{1}{2}$,

$\therefore \sqrt{2} \le u \le \sqrt{3}$,

即 u 的取值范围为 $[\sqrt{2},\sqrt{3}]$. ……………………………………………………………12 分

(解法二)由题意，l_1，l_2 的斜率存在且不为零，设点 $P(x_0,y_0)$，l_1: $y = kx + b$，l_2: $y = \dfrac{m}{k}x + n$,

显然 $k \ne \dfrac{m}{k}$，即 $k^2 - m \ne 0$,

由方程组 $\begin{cases} y = kx + b, \\ \dfrac{x^2}{2} + y^2 = 1, \end{cases}$ 消去 y，并整理得 $(1+2k^2)x^2 + 4kbx + 2b^2 - 2 = 0$, ………………6 分

$\because l_1$ 与 C 相切，

$\therefore \Delta = (4kb)^2 - 4(2k^2+1)(2b^2-2) = 0$,

即 $b^2 = 2k^2 + 1$, ……………………………………………………………………………7 分

同理由 l_2 与 C 相切可得，$n^2 = \dfrac{2m^2}{k^2} + 1$,

由方程组 $\begin{cases} y = kx + b, \\ y = \dfrac{m}{k}x + n, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x_0 = \dfrac{(n-b)k}{k^2 - m}, \\ y_0 = \dfrac{k^2 n - bm}{k^2 - m}, \end{cases}$ ……………………………………8 分

$$\therefore \begin{cases} x_0^2 = \dfrac{n^2k^2 + b^2k^2 - 2nbk^2}{(k^2-m)^2}, \\ y_0^2 = \dfrac{n^2k^4 + b^2m^2 - 2nbmk^2}{(k^2-m)^2}, \end{cases}$$

$$\therefore y_0{}^2 - mx_0{}^2 = \frac{(k^4 - mk^2)n^2 + (m^2 - mk^2)b^2}{(k^2-m)^2} = \frac{k^2n^2 - mb^2}{k^2 - m},$$

又$\because b^2 = 2k^2 + 1$，$n^2 = \dfrac{2m^2}{k^2} + 1$,

$$\therefore y_0{}^2 - mx_0{}^2 = \frac{k^2(\frac{2m^2}{k^2} + 1) - m(2k^2+1)}{k^2 - m} = 1 - 2m,$$

$\therefore y_0{}^2 = mx_0{}^2 + 1 - 2m$，

$\therefore x_0{}^2 + y_0{}^2 = (1+m)x_0{}^2 + 1 - 2m$， ……………………………………………10 分

$\therefore |PO| = \sqrt{x_0{}^2 + y_0{}^2} = \sqrt{(1+m)x_0{}^2 + 1 - 2m}$，

易知当 $x_0 = 0$ 时，有 $u = |PO|_{\min} = \sqrt{1-2m}$， ……………………………………………11 分

又 $\because -1 \le m \le -\dfrac{1}{2}$，

$\therefore \sqrt{2} \le u \le \sqrt{3}$，

即 u 的取值范围为 $[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$. ……………………………………………12 分

【命题意图】本题以直线与椭圆为载体，以椭圆的双切线（切点弦）性质为背景，利用代数方法解决几何问题，考查学生的逻辑推理，数学运算等数学核心素养及思辨能力.

22.（12 分）

已知函数 $f(x) = a\ln^2 x + 2x(1-\ln x)$， $a \in \mathbf{R}$.

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）若函数 $g(x) = \mathrm{e}^2 f(x) - 2a^2$ 有且仅有 3 个零点，求 a 的取值范围.（其中常数 e=2.718 28…，是自然对数的底数）

解：（1）易知 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，且 $f'(x) = \dfrac{2(a-x)\ln x}{x}$， $f'(1) = 0$， ……………………1 分

①若 $a \le 0$，当 $x \in (0,1)$ 时， $f'(x) > 0$；当 $x \in (1,+\infty)$ 时， $f'(x) < 0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减； ……………………………………………2 分

②若 $0 < a < 1$，易知当 $x \in (0,a)$ 时， $f'(x) < 0$；

当 $x \in (a,1)$ 时， $f'(x) > 0$；当 $x \in (1,+\infty)$ 时， $f'(x) < 0$；

$\therefore f(x)$ 在 $(0,a)$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递减，在 $(a,1)$ 上单调递增； ……………………………………………3 分

③若 $a = 1$，则 $f'(x) \le 0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减； ……………………………………………4 分

④若 $a > 1$，易知当 $x \in (0,1)$ 时， $f'(x) < 0$；

当 $x \in (1,a)$ 时， $f'(x) > 0$；当 $x \in (a,+\infty)$ 时， $f'(x) < 0$；

$\therefore f(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $(a,+\infty)$ 上单调递减，在 $(1,a)$ 上单调递增.

综上所述，当 $a \le 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减；当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,a)$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递减，在 $(a,1)$ 上单调递增；当 $a=1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；当 $a>1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $(a,+\infty)$ 上单调递减，在 $(1,a)$ 上单调递增. ……………………………………5 分

（2）令 $g(x)=0$，则 $f(x)=\dfrac{2a^2}{\mathrm{e}^2}$，

$\therefore$依题意可知函数 $y=f(x)$ 与 $y=\dfrac{2a^2}{\mathrm{e}^2}$ 的图象有 3 个不同的交点，

$\therefore$由（1）易知必有 $0<a<1$，或 $a>1$， ……………………………………6 分

①当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,a)$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递减，在 $(a,1)$ 上单调递增，

$\therefore$ $f(x)$ 的极大值为 $f(1)=2$，$f(x)$ 的极小值为 $f(a)=a(\ln^2 a-2\ln a+2)$，

又 $f(a)=a(\ln^2 a-2\ln a+2)=a[(\ln a-1)^2+1]>a>\dfrac{2a^2}{\mathrm{e}^2}$，

$\therefore$函数 $y=f(x)$ 与 $y=\dfrac{2a^2}{\mathrm{e}^2}$ 的图象至多有 1 个交点，不合题意， ……………………………………7 分

②当 $a>1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $(a,+\infty)$ 上单调递减，在 $(1,a)$ 上单调递增，

$\therefore$ $f(x)$ 的极小值为 $f(1)=2$，$f(x)$ 的极大值为 $f(a)=a(\ln^2 a-2\ln a+2)$，

$\therefore$须有 $2<\dfrac{2a^2}{\mathrm{e}^2}<a(\ln^2 a-2\ln a+2)$ 成立，

$\because$ $2<\dfrac{2a^2}{\mathrm{e}^2}$，$\therefore$ $a>\mathrm{e}$， ……………………………………8 分

$\because$ $\dfrac{2a^2}{\mathrm{e}^2}<a(\ln^2 a-2\ln a+2)$，$\therefore$ $\dfrac{2a}{\mathrm{e}^2}<\ln^2 a-2\ln a+2$（*），

下面求不等式（*）的解集，

（解法一）令 $\ln a=x$，则不等式（*）等价于 $2\mathrm{e}^{x-2}<x^2-2x+2$，

令函数 $h(x)=x^2-2x-2\mathrm{e}^{x-2}+2$，则 $h'(x)=2x-2-2\mathrm{e}^{x-2}$，

令 $y=2x-2-2\mathrm{e}^{x-2}$，则 $y'=2-2\mathrm{e}^{x-2}$，

x	$(-\infty,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$
y	□	极大值	□

函数 $y=2x-2-2\mathrm{e}^{x-2}$ 在区间 $(-\infty,2)$ 上单调递增，在区间 $(2,+\infty)$ 上单调递减，

又 $y(2)=0$，$\therefore$ $y=2x-2-2\mathrm{e}^{x-2}\le 0$， ……………………………………9 分

即 $h'(x)\le 0$ 恒成立，故函数 $h(x)$ 单调递减，

又 $h(2)=0$，$\therefore$当且仅当 $x<2$ 时，$h(x)>0$，

∴不等式 $2e^{x-2}<x^2-2x+2$ 的解集为 $(-\infty,2)$，即不等式（*）的解集为 $(0,e^2)$， …………10 分

（解法二）令函数 $\varphi(a)=\ln^2 a-2\ln a-\dfrac{2a}{e^2}+2$，则 $\varphi'(a)=\dfrac{2\ln a-2-\dfrac{2a}{e^2}}{a}$，

令 $y=2\ln a-\dfrac{2a}{e^2}-2$，则 $y'=\dfrac{2}{a}-\dfrac{2}{e^2}$，

x	$(0,e^2)$	e^2	$(e^2,+\infty)$
y'	+	0	−
y	↗	极大值	↘

∴函数 $y=2\ln a-\dfrac{2a}{e^2}-2$ 在区间 $(0,e^2)$ 上单调递增，在区间 $(e^2,+\infty)$ 上单调递减，

又 $y(e^2)=0$，∴ $y=2\ln a-\dfrac{2a}{e^2}-2\le 0$， ……………………………………9 分

即 $\varphi'(a)\le 0$ 恒成立，故函数 $\varphi(a)$ 单调递减，

又 $\varphi(e^2)=0$， ∴不等式 $\varphi(a)>0$ 的解集为 $(0,e^2)$， ……………………………………10 分

∴必有 $e<a<e^2$，

下面证明，当 $e<a<e^2$ 时，函数 $g(x)=e^2f(x)-2a^2$ 有且仅有 3 个零点，

（解法一）一方面，当 $e<a<e^2$ 时， $f(e^{-a})=a^3+2e^{-a}(1+a)>a^3>\dfrac{2a^2}{e^2}$， …………11 分

另一方面，当 $e<a<e^2$ 时， $f(e^3)=9a-4e^3<9e^2-4e^3=e^2(9-4e)<0$，∴ $f(e^3)<f(1)$，

不难知道，当 $e<a<e^2$ 时，函数 $g(x)=e^2f(x)-2a^2$ 有且仅有 3 个零点，

综上所述，实数 a 的取值范围为 (e,e^2). ……………………………………12 分

（解法二）当 $e<a<e^2$ 时，有 $f(\dfrac{1}{a})-f(a)=[a\ln^2 a+\dfrac{2}{a}(1+\ln a)]-[a\ln^2 a+2a(1-\ln a)]$

$=\dfrac{2}{a}-2a+(\dfrac{2}{a}+2a)\ln a>\dfrac{2}{a}-2a+(\dfrac{2}{a}+2a)=\dfrac{4}{a}>0$，

∴ $f(\dfrac{1}{a})>f(a)$， ……………………………………………………11 分

显然当 $x>0$ 时，有 $e^x>\dfrac{x^2}{2}$(证明略)，

于是，当 $e<a<e^2$ 时，有 $f(e^{a+1})=a(a+1)^2-2ae^{a+1}<a(a+1)^2-a(a+1)^2=0$，

∴ $f(e^{a+1})<f(1)$，

不难知道，当 $e<a<e^2$ 时，函数 $g(x)=e^2f(x)-2a^2$ 有且仅有 3 个零点，

综上所述，实数 a 的取值范围为 $(\mathrm{e},\mathrm{e}^2)$. ……………………………………………………12 分

【命题意图】 本题以基本初等函数的单调性和零点问题为载体，考查学生利用导数分析、解决问题的能力，分类讨论思想及逻辑推理、数学运算等数学核心素养，具有较强的综合性.