圆锥曲线的解题技巧

一、常规七大题型：

（1）中点弦问题

具有斜率的弦中点问题，常用设而不求法（点差法）：设曲线上两点为(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，代入方程，然后两方程相减，再应用中点关系及斜率公式（当然在这里也要注意斜率不存在的请款讨论），消去四个参数。

如：（1）$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$与直线相交于 A、B，设弦 AB 中点为 M($x_0$,$y_0$)，则有$\frac{x_0}{a^2}+\frac{y_0}{b^2}k=0$。

（2）$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$与直线 l 相交于 A、B，设弦 AB 中点为 M(x_0,y_0)则有$\frac{x_0}{a^2}-\frac{y_0}{b^2}k=0$

（3）y^2=2px（p>0）与直线 l 相交于 A、B 设弦 AB 中点为 M(x_0,y_0),则有 2y_0k=2p,即 y_0k=p.

典型例题　给定双曲线$x^2-\frac{y^2}{2}=1$。过 A（2，1）的直线与双曲线交于两点P_1　及P_2，求线段P_1 P_2的中点 P 的轨迹方程。

（2）焦点三角形问题

椭圆或双曲线上一点 P，与两个焦点F_1、F_2构成的三角形问题，常用正、余弦定理搭桥。

典型例题　设 P(x,y)为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上任一点，$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$为焦点，$\angle PF_1F_2=\alpha$，$\angle PF_2F_1=\beta$。

（1）求证离心率 $e=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta}$；

（2）求 $|PF_1|^3+PF_2|^3$ 的最值。

（3）直线与圆锥曲线位置关系问题

直线与圆锥曲线的位置关系的基本方法是解方程组，进而转化为一元二次方程后利用判别式、根与系数的关系、求根公式等来处理，应特别注意数形结合的思想，通过图形的直观性帮助分析解决问题，如果直线过椭圆的焦点，结合三大曲线的定义去解。

典型例题

抛物线方程 $y^2=p(x+1)\ (p>0)$，直线 $x+y=t$ 与x轴的交点在抛物线准线的右边。

（1）求证：直线与抛物线总有两个不同交点

（2）设直线与抛物线的交点为 A、B，且 OA⊥OB，求 p 关于 t 的函数 f(t)的表达式。

（4）圆锥曲线的相关最值（范围）问题

圆锥曲线中的有关最值（范围）问题，常用代数法和几何法解决。

<1>若命题的条件和结论具有明显的几何意义，一般可用图形性质来解决。

<2>若命题的条件和结论体现明确的函数关系式，则可建立目标函数（通常利用二次函数，三角函数，均值不等式）求最值。

（1），可以设法得到关于 a 的不等式，通过解不等式求出 a 的范围，即：**“求范围，找不等式”**。或者将 a 表示为另一个变量的函数，利用求函数的值域求出 a 的范围；对于（2）首先要把△NAB 的面积表示为一个变量的函数，然后再求它的最大值,即：**“最值问题，函数思想”**。

最值问题的处理思路：

1、建立目标函数。用坐标表示距离，用方程消参转化为一元二次函数的最值问题，关键是由方程求 x、y 的范围；

2、数形结合，用化曲为直的转化思想；

3、利用判别式，对于二次函数求最值，往往由条件建立二次方程，用判别式求最值；

4、借助均值不等式求最值。

典型例题

已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$，过 M（a,0）且斜率为 1 的直线 L 与抛物线交于不同的两点 A、B，|AB|≤2p

（1）求 a 的取值范围；（2）若线段 AB 的垂直平分线交 x 轴于点 N，求△NAB 面积的最大值。

（5）求曲线的方程问题

1．曲线的形状已知--------这类问题一般可用待定系数法解决。

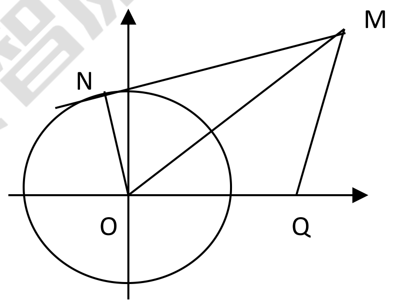
典型例题

已知直线 L 过原点，抛物线 C 的顶点在原点，焦点在 x 轴正半轴上。若点 A（-1，0）和点 B（0，8）关于 L 的对称点都在 C 上，求直线 L 和抛物线 C 的方程。

2．曲线的形状未知-----求轨迹方程

典型例题

已知直角坐标平面上点 Q（2，0）和圆 C：$x^2+y^2=1$，动点 M 到圆 C 的切线长与|MQ|的比等于常数λ（$\lambda>0$），求动点 M 的轨迹方程，并说明它是什么曲线。



（6） 存在两点关于直线对称问题

在曲线上两点关于某直线对称问题，可以按如下方式分三步解决：求两点所在的直线，求这两直线的交点，使这交点在圆锥曲线形内。（当然也可以利用韦达定理并结合判别式来解决）

典型例题 已知椭圆 C 的方程$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，试确定 m 的取值范围，使得对于直线$y=4x+m$，椭圆 C 上有不同两点关于直线对称

（7）两线段垂直问题

圆锥曲线两焦半径互相垂直问题，常用$k_1 \bullet k_2=\dfrac{y_1 \bullet y_2}{x_1 \bullet x_2}=-1$来处理或用向量的坐标运算来处理。

典型例题　已知直线l的斜率为k，且过点$P(-2,0)$，抛物线$C:y^2=4(x+1)$，直线l与抛物线C有两个不同的交点（如图）。

（1）求k的取值范围；

（2）直线l的倾斜角θ为何值时，A、B与抛物线C的焦点连线互相垂直。

四、解题的技巧方面：

在教学中，学生普遍觉得解析几何问题的计算量较大。事实上，如果我们能够充分利用几何图形、韦达定理、曲线系方程，以及运用“设而不求”的策略，往往能够减少计算量。下面举例说明：

（1）充分利用几何图形

解析几何的研究对象就是几何图形及其性质，所以在处理解析几何问题时，除了运用代数方程外，充分挖掘几何条件，并结合平面几何知识，这往往能减少计算量。

典型例题　设直线$3x+4y+m=0$与圆$x^2+y^2+x-2y=0$相交于P、Q两点，O为坐标原点，若$OP\perp OQ$，求m的值。

（2）　充分利用韦达定理及“设而不求”的策略

我们经常设出弦的端点坐标而不求它，而是结合韦达定理求解，这种方法在有关斜率、中点等问题中常常用到。

典型例题　已知中心在原点O，焦点在y轴上的椭圆与直线$y=x+1$相交于P、Q两点，且$OP\perp OQ$，$|PQ|=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，求此椭圆方程。

（3）　充分利用曲线系方程

利用曲线系方程可以避免求曲线的交点，因此也可以减少计算。

典型例题　求经过两已知圆C_1：$x^2+y^2-4x+2y=0$和C_2：$x^2+y^2-2y-4=0$的

交点，且圆心在直线 l ： $2x+4y-1=0$ 上的圆的方程。

（4）充分利用椭圆的参数方程

椭圆的参数方程涉及到正、余弦，利用正、余弦的有界性，可以解决相关的求最值的问题.这也是我们常说的三角代换法。

典型例题　　P 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上一动点，A 为长轴的右端点，B 为短轴的上端点，求四边形 OAPB 面积的最大值及此时点 P 的坐标。

（5）线段长的几种简便计算方法

① 充分利用现成结果，减少运算过程

一般地，求直线与圆锥曲线相交的弦 AB 长的方法是：把直线方程 $y=kx+b$ 代入圆锥曲线方程中，得到型如 $ax^2+bx+c=0$ 的方程，方程的两根设为 x_A， x_B，判别式为△，则 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_A-x_B|=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{\sqrt{\triangle}}{|a|}$，若直接用结论，能减少配方、开方等运算过程。

例　　求直线 $x-y+1=0$ 被椭圆 $x^2+4y^2=16$ 所截得的线段 AB 的长。

② 结合图形的特殊位置关系，减少运算

在求过圆锥曲线焦点的弦长时，由于圆锥曲线的定义都涉及焦点，结合图形运用圆锥曲线的定义，可回避复杂运算。

例　　F_1、F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 的两个焦点，AB 是经过 F_1 的弦，若 $|AB|=8$，求值 $|F_2A|+|F_2B|$

③ 利用圆锥曲线的定义，把到焦点的距离转化为到准线的距离

例　　点 A（3，2）为定点，点 F 是抛物线 $y^2=4x$ 的焦点，点 P 在抛物线 $y^2=4x$ 上移动，若 $|PA|+|PF|$ 取得最小值，求点 P 的坐标。

圆锥曲线解题方法技巧归纳

第一、知识储备：

1. 直线方程的形式

（1）直线方程的形式有五件：点斜式、两点式、斜截式、截距式、一般式。

（2）与直线相关的重要内容

①倾斜角与斜率 $k=\tan\alpha,\alpha\in[0,\pi)$

② 点到直线的距离 $d=\left|\dfrac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$ ③ 夹角公式：$\tan\alpha=\left|\dfrac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}\right|$

（3）弦长公式

直线 $y=kx+b$ 上两点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 间的距离：$|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|$

$=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$ 或 $|AB|=\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}|y_1-y_2|$

（4）两条直线的位置关系

①$l_1\perp l_2\Leftrightarrow k_1k_2$=-1　　② $l_1//l_2\Leftrightarrow k_1=k_2$且$b_1\neq b_2$

2、圆锥曲线方程及性质

(1)、椭圆的方程的形式有几种？（三种形式）

标准方程：$\dfrac{x^2}{m}+\dfrac{y^2}{n}=1(m>0,n>0$且$m\neq n)$

距离式方程：$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$

参数方程：$x=a\cos\theta,y=b\sin\theta$

(2)、双曲线的方程的形式有两种

标准方程：$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1(m\cdot n<0)$

距离式方程：$|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}|=2a$

(3)、三种圆锥曲线的通径你记得吗？

椭圆：$\frac{2b^2}{a}$；双曲线：$\frac{2b^2}{a}$；抛物线：$2p$

(4)、圆锥曲线的定义你记清楚了吗？

如：已知 F_1、F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的两个焦点，平面内一个动点 M 满足 $|MF_1|-|MF_2|=2$ 则动点 M 的轨迹是（　　）

A、双曲线；B、双曲线的一支；C、两条射线；D、一条射线

(5)、焦点三角形面积公式：P在椭圆上时，$S_{\Delta F_1PF_2}=b^2\tan\frac{\theta}{2}$

P在双曲线上时，$S_{\Delta F_1PF_2}=b^2\cot\frac{\theta}{2}$

（其中 $\angle F_1PF_2=\theta,\cos\theta=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-4c^2}{|PF_1|\cdot|PF_2|},\overrightarrow{PF_1}\bullet\overrightarrow{PF_2}=|\overrightarrow{PF_1}||\overrightarrow{PF_2}|\cos\theta$ ）

(6)、记住焦半径公式：（1）椭圆焦点在x轴上时为$a\pm ex_0$;焦点在y轴上时为$a\pm ey_0$，可简记为“左加右减，上加下减”。

（2）双曲线焦点在x轴上时为$e|x_0|\pm a$

（3）抛物线焦点在x轴上时为$|x_1|+\frac{p}{2}$,焦点在y轴上时为$|y_1|+\frac{p}{2}$

(6)、椭圆和双曲线的基本量三角形你清楚吗？_

第二、方法储备

1、点差法（中点弦问题）

设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，$M(a,b)$ 为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的弦 AB 中点则有

$\frac{x_1{}^2}{4}+\frac{y_1{}^2}{3}=1$，$\frac{x_2{}^2}{4}+\frac{y_2{}^2}{3}=1$；两式相减得$\frac{\left(x_1{}^2-x_2{}^2\right)}{4}+\frac{\left(y_1{}^2-y_2{}^2\right)}{3}=0$

$\Rightarrow\frac{\left(x_1-x_2\right)\left(x_1+x_2\right)}{4}=-\frac{\left(y_1-y_2\right)\left(y_1+y_2\right)}{3}\Rightarrow k_{AB}=-\frac{3a}{4b}$

2、联立消元法：你会解直线与圆锥曲线的位置关系一类的问题吗？

经典套路是什么？如果有两个参数怎么办？

设直线的方程，并且与曲线的方程联立，消去一个未知数，得到一个二次方程，使用判别式$\Delta\geq 0$，以及根与系数的关系，代入弦长公式，设曲线上的两点$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，将这两点代入曲线方程得到①②两个式子，然后①-②，整体消元······，若有两个字母未知数，则要找到它们的联系，消去一个，比如直线过焦点，则可以利用三点A、B、F共线解决之。若有向量的关系，则寻找坐标之间的关系，根与系数的关系结合消元处理。一旦设直线为$y=kx+b$，就意味着k存在。

例1、已知三角形ABC的三个顶点均在椭圆$4x^2+5y^2=80$上，且点A是椭圆短轴的一个端点（点A在y轴正半轴上）.

（1）若三角形ABC的重心是椭圆的右焦点，试求直线BC的方程;

（2）若角A为90^0，AD垂直BC于D，试求点D的轨迹方程.

分析：第一问抓住“重心”，利用点差法及重心坐标公式可求出中点弦BC的斜率，从而写出直线BC的方程。第二问抓住角A为90^0可得出AB⊥AC，从而得$x_1x_2+y_1y_2-14(y_1+y_2)+16=0$，然后利用联立消元法及交轨法求出点D的轨迹方程;

解：（1）设B（x_1，y_1），C(x_2，y_2），BC中点为(x_0,y_0)，F(2,0)则有

$\frac{x_1^2}{20}+\frac{y_1^2}{16}=1,\frac{x_2^2}{20}+\frac{y_2^2}{16}=1$

两式作差有 $\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{20}+\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{16}=0$ $\frac{x_0}{5}+\frac{y_0k}{4}=0$ (1)

F(2,0)为三角形重心，所以由$\frac{x_1+x_2}{3}=2$，得$x_0=3$，由$\frac{y_1+y_2+4}{3}=0$得$y_0=-2$，代入（1）得$k=\frac{6}{5}$

直线 BC 的方程为$6x-5y-28=0$

2)由 AB⊥AC 得$x_1x_2+y_1y_2-14(y_1+y_2)+16=0$ （2）

设直线 BC 方程为 $y=kx+b$,代入$4x^2+5y^2=80$，得$(4+5k^2)x^2+10bkx+5b^2-80=0$

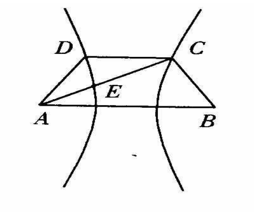
$x_1+x_2=\frac{-10kb}{4+5k^2}$，$x_1x_2=\frac{5b^2-80}{4+5k^2}$

$y_1+y_2=\frac{8k}{4+5k^2},y_1y_2=\frac{4b^2-80k^2}{4+5k^2}$ 代入（2）式得

$\frac{9b^2-32b-16}{4+5k^2}=0$，解得$b=4$(舍)或$b=-\frac{4}{9}$

直线过定点（0，$-\frac{4}{9}$)，设 D（x,y），则$\frac{y+\frac{4}{9}}{x}\times\frac{y-4}{x}=-1$，即$9y^2+9x^2-32y-16=0$

所以所求点 D 的轨迹方程是$x^2+(y-\frac{16}{9})^2=(\frac{20}{9})^2(y\neq 4)$。



4、设而不求法

例 2、如图，已知梯形 ABCD 中$|AB|=2|CD|$，点 E 分有向线段$\overline{AC}$所成的比为λ，双曲线过 C、D、E 三点，且以 A、B 为焦点当$\frac{2}{3}\leq\lambda\leq\frac{3}{4}$时，求双曲线离心率$e$的取值范围。

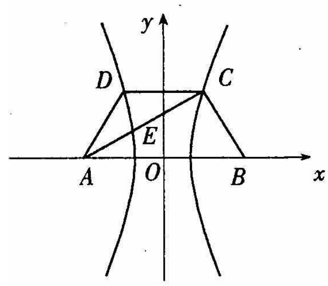
分析：本小题主要考查坐标法、定比分点坐标公式、双曲线的概念

和性质，推理、运算能力和综合运用数学知识解决问题的能力。建立直角坐标系 xOy，如图，若设 C$\left(\frac{c}{2},h\right)$，代入$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，求得$h=\cdots$，进而求得 $x_E=\cdots,y_E=\cdots$，再代入 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，建立目标函数 $f(a,b,c,\lambda)=0$，整理$f(e,\lambda)=0$，此运算量可见是难上加难.我们对h可采取设而不求的解题策略,

建立目标函数$f(a,b,c,\lambda)=0$，整理$f(e,\lambda)=0$,化繁为简.

解法一：如图，以 AB 为垂直平分线为y轴，直线 AB 为x轴，建立直角坐标系 xOy，则 CD$\perp y$轴因为双曲线经过点 C、D，且以 A、B 为焦点，由双曲线的对称性知 C、D 关于y轴对称

依题意，记 A$(-c,0)$，C$\left(\frac{c}{2},h\right)$，E$(x_0,y_0)$，其中$c=\frac{1}{2}|AB|$为双曲线的半焦距，$h$是梯形的高，由定比分点坐标公式得



$$x_0=\frac{-c+\frac{c}{2}\lambda}{1+\lambda}=\frac{(\lambda-2)c}{2(\lambda+1)},\quad y_0=\frac{\lambda h}{1+\lambda}$$

设双曲线的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，则离心率$e=\frac{c}{a}$

由点 C、E 在双曲线上，将点 C、E 的坐标和$e=\frac{c}{a}$代入双曲线方程得

$$\frac{e^2}{4}-\frac{h^2}{b^2}=1, \qquad ①$$

$$\frac{e^2}{4}\left(\frac{\lambda-2}{\lambda+1}\right)-\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)\frac{h^2}{b^2}=1 \qquad ②$$

由①式得 $$\frac{h^2}{b^2}=\frac{e^2}{4}-1, \qquad ③$$

将③式代入②式，整理得

$$\frac{e^2}{4}(4-4\lambda)=1+2\lambda,$$

故 $$\lambda=1-\frac{3}{e^2+1}$$

由题设$\frac{2}{3}\le\lambda\le\frac{3}{4}$得，$\frac{2}{3}\le 1-\frac{3}{e^2+2}\le\frac{3}{4}$

解得 $$\sqrt{7}\le e\le\sqrt{10}$$

所以双曲线的离心率的取值范围为$\left[\sqrt{7},\sqrt{10}\right]$

分析：考虑$|AE|,|AC|$为焦半径,可用焦半径公式，$|AE|,|AC|$用E,C的横坐标表示，回避h的计算，达到设而不求的解题策略.

解法二：建系同解法一，$|AE|=-(a+ex_E),|AC|=a+ex_C$，

$x_E=\dfrac{-c+\frac{c}{2}\lambda}{1+\lambda}=\dfrac{(\lambda-2)c}{2(\lambda+1)}$，又$\dfrac{|AE|}{|AC|}=\dfrac{\lambda}{1+\lambda}$，代入整理$\lambda=1-\dfrac{3}{e^2+1}$，由题设$\frac{2}{3}\le\lambda\le\frac{3}{4}$得，$\frac{2}{3}\le 1-\frac{3}{e^2+2}\le\frac{3}{4}$

解得 $$\sqrt{7}\le e\le\sqrt{10}$$

所以双曲线的离心率的取值范围为$\left[\sqrt{7},\sqrt{10}\right]$

5、判别式法

例3已知双曲线$C:\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}=1$，直线$l$过点$A(\sqrt{2},0)$，斜率为$k$，当$0<k<1$时，双曲线的上支上有且仅有一点B到直线$l$的距离为$\sqrt{2}$，试求$k$的值及此时点B的坐标。

分析1：解析几何是用代数方法来研究几何图形的一门学科，因此，数形结合必然是研究解析几何问题的重要手段. 从“有且仅有”这个微观入手，对照草图，不难想到：过点B作与l平行的直线，必与双曲线C相切. 而相切的代数表现形式是所构造方程的判别式

$\Delta=0$．由此出发，可设计如下解题思路：

$$l:\quad y=k(x-\sqrt{2})\quad (0<k<1)$$

$$\Big\downarrow \text{直线 } l' \text{ 在 } l \text{ 的上方且到直线 } l \text{ 的距离为 } \sqrt{2}$$

$$l':\quad y=kx+\sqrt{2k^2+2}-\sqrt{2}k$$

$$\Big\downarrow \text{把直线 } l' \text{ 的方程代入双曲线方程，消去 } y\text{，令判别式 } \Delta=0$$

解得k的值

解题过程略.

分析 2：如果从代数推理的角度去思考，就应当把距离用代数式表达，即所谓“有且仅有一点 B 到直线l的距离为$\sqrt{2}$”，相当于化归的方程有唯一解. 据此设计出如下解题思路：

问题

$\Updownarrow$

关于x的方程$\dfrac{\left|kx-\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2}k\right|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{2}\quad (0<k<1)$有唯一

$\Downarrow$ 转化为一元二次方程根的问题

求解

简解：设点$M(x,\sqrt{2+x^2})$为双曲线 C 上支上任一点，则点 M 到直线l的距离为：

$$\frac{\left|kx-\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2}k\right|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{2}\qquad (0<k<1)\qquad (*)$$

于是，问题即可转化为如上关于x的方程.

由于$0<k<1$，所以$\sqrt{2+x^2}>|x|>kx$，从而有

$$\left|kx-\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2}k\right|=-kx+\sqrt{2+x^2}+\sqrt{2}k.$$

于是关于x的方程$(*)$

$$\Leftrightarrow -kx+\sqrt{2+x^2}+\sqrt{2}k=\sqrt{2(k^2+1)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left(\sqrt{2+x^2}\right)^2=(\sqrt{2(k^2+1)}-\sqrt{2}k+kx)^2,\\ \sqrt{2(k^2+1)}-\sqrt{2}k+kx>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left(k^2-1\right)x^2+2k\left(\sqrt{2(k^2+1)}-\sqrt{2}k\right)x+\left(\sqrt{2(k^2+1)}-\sqrt{2}k\right)^2-2=0,\\ \sqrt{2(k^2+1)}-\sqrt{2}k+kx>0.\end{cases}$$

由$0<k<1$可知：

方程$\left(k^2-1\right)x^2+2k\left(\sqrt{2(k^2+1)}-\sqrt{2}k\right)x+\left(\sqrt{2(k^2+1)}-\sqrt{2}k\right)^2-2=0$的二根同正，故$\sqrt{2(k^2+1)}-\sqrt{2}k+kx>0$恒成立，于是$(*)$等价于

$$\left(k^2-1\right)x^2+2k\left(\sqrt{2(k^2+1)}-\sqrt{2}k\right)x+\left(\sqrt{2(k^2+1)}-\sqrt{2}k\right)^2-2=0.$$

由如上关于x的方程有唯一解，得其判别式$\Delta=0$，就可解得$k=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

点评：上述解法紧扣解题目标，不断进行问题转换，充分体现了全局观念与整体思维的优越性.

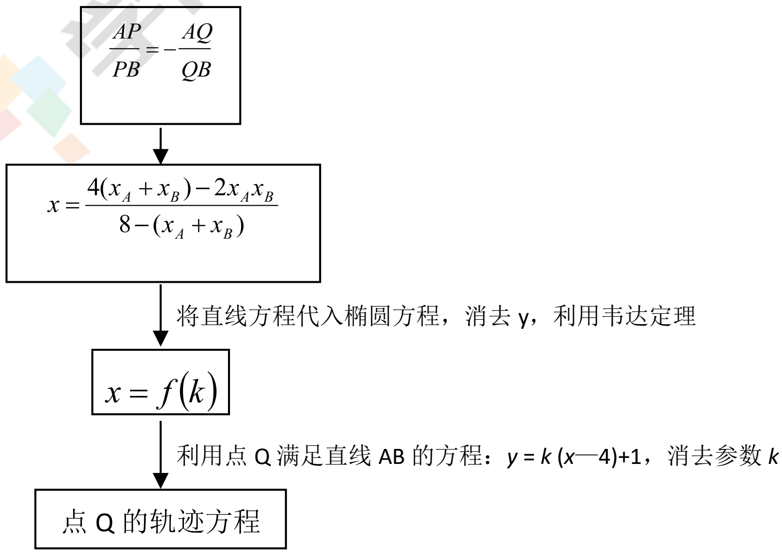
例 4 已知椭圆 C:$x^2+2y^2=8$和点 P（4，1），过 P 作直线交椭圆于 A、B 两点，在线段 AB 上取点 Q，使$\frac{AP}{PB}=-\frac{AQ}{QB}$，求动点 Q 的轨迹所在曲线的方程.

分析：这是一个轨迹问题，解题困难在于多动点的困扰，学生往往不知从何入手。其实，应该想到轨迹问题可以通过参数法求解. 因

此，首先是选定参数，然后想方设法将点 Q 的横、纵坐标用参数表达，最后通过消参可达到解题的目的.

由于点$Q(x,y)$的变化是由直线 AB 的变化引起的，自然可选择直线 AB 的斜率k作为参数，如何将x,y与k联系起来？一方面利用点 Q 在直线 AB 上；另一方面就是运用题目条件：$\frac{AP}{PB}=-\frac{AQ}{QB}$来转化.由 A、B、P、Q 四点共线，不难得到$x=\frac{4(x_A+x_B)-2x_Ax_B}{8-(x_A+x_B)}$，要建立$x$与$k$的关系，只需将直线 AB 的方程代入椭圆 C 的方程，利用韦达定理即可.

通过这样的分析，可以看出，虽然我们还没有开始解题，但对于如何解决本题，已经做到心中有数.



在得到 $x=f(k)$ 之后，如果能够从整体上把握，认识到：所谓消参，目的不过是得到关于 x,y 的方程（不含 k），则可由 $y=k(x-4)+1$ 解得 $k=\dfrac{y-1}{x-4}$，直接代入 $x=f(k)$ 即可得到轨迹方程。从而简化消去参的过程。

简解：设 $A(x_1,y_1),B(x_2,\ y_2),Q(x,y)$，则由 $\dfrac{AP}{PB}=-\dfrac{AQ}{QB}$ 可得：$\dfrac{4-x_1}{x_2-4}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x}$，

解之得：$x=\dfrac{4(x_1+x_2)-2x_1x_2}{8-(x_1+x_2)}$ （1）

设直线 AB 的方程为：$y=k(x-4)+1$，代入椭圆 C 的方程，消去 y 得出关于 x 的一元二次方程：

$$\left(2k^2+1\right)x^2+4k(1-4k)x+2(1-4k)^2-8=0 \qquad (2)$$

$$\therefore \quad \begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{4k(4k-1)}{2k^2+1}, \\ x_1x_2=\dfrac{2(1-4k)^2-8}{2k^2+1}. \end{cases}$$

代入（1），化简得：$x=\dfrac{4k+3}{k+2}.$ (3)

与 $y=k(x-4)+1$ 联立，消去 k 得：$(2x+y-4)(x-4)=0.$

在（2）中，由 $\Delta=-64k^2+64k+24>0$，解得 $\frac{2-\sqrt{10}}{4}<k<\frac{2+\sqrt{10}}{4}$，结合（3）可求得 $\frac{16-2\sqrt{10}}{9}<x<\frac{16+2\sqrt{10}}{9}.$

故知点 Q 的轨迹方程为：$2x+y-4=0$ （$\dfrac{16-2\sqrt{10}}{9}<x<\dfrac{16+2\sqrt{10}}{9}$）.

点评：由方程组实施消元，产生一个标准的关于一个变量的一元二次方程，其判别式、韦达定理模块思维易于想到. 这当中，难点在

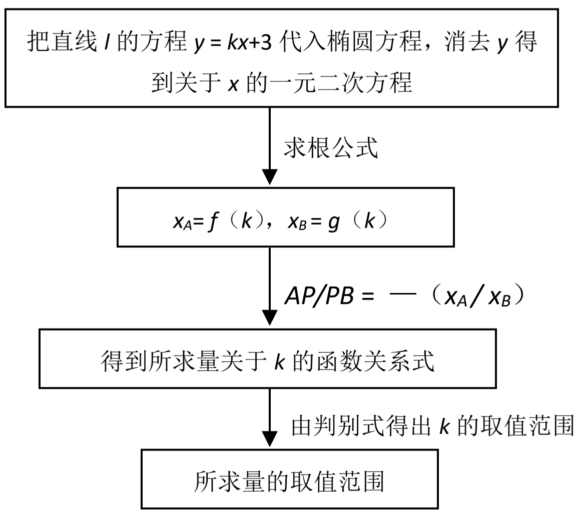
引出参，活点在应用参，重点在消去参.，而“引参、用参、消参”三步曲，正是解析几何综合问题求解的一条有效通道.

6、求根公式法

例 5 设直线l过点 P（0，3），和椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$顺次交于 A、B 两点，试求$\frac{AP}{PB}$的取值范围.

分析：本题中，绝大多数同学不难得到：$\frac{AP}{PB}=-\frac{x_A}{x_B}$，但从此后却一筹莫展，问题的根源在于对题目的整体把握不够. 事实上，所谓求取值范围，不外乎两条路：其一是构造所求变量关于某个（或某几个）参数的函数关系式（或方程），这只需利用对应的思想实施；其二则是构造关于所求量的一个不等关系.

分析 1:从第一条想法入手，$\frac{AP}{PB}=-\frac{x_A}{x_B}$已经是一个关系式，但由于有两个变量$x_A,x_B$，同时这两个变量的范围不好控制，所以自然想到利用第 3 个变量——直线 AB 的斜率 k. 问题就转化为如何将x_A,x_B转化为关于 k 的表达式，到此为止，将直线方程代入椭圆方程，消去 y 得出关于x的一元二次方程，其求根公式呼之欲出.



简解1： 当直线l垂直于x轴时，可求得$\frac{AP}{PB}=-\frac{1}{5}$；

当l与x轴不垂直时，设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，直线l的方程为：$y=kx+3$，代入椭圆方程，消去y得$(9k^2+4)x^2+54kx+45=0$

解之得 $x_{1,2}=\frac{-27k\pm6\sqrt{9k^2-5}}{9k^2+4}$.

因为椭圆关于y轴对称，点P在y轴上，所以只需考虑$k>0$的情形.

当$k>0$时，$x_1=\frac{-27k+6\sqrt{9k^2-5}}{9k^2+4}$，$x_2=\frac{-27k-6\sqrt{9k^2-5}}{9k^2+4}$，

所以 $\frac{AP}{PB}=-\frac{x_1}{x_2}=\frac{-9k+2\sqrt{9k^2-5}}{9k+2\sqrt{9k^2-5}}=1-\frac{18k}{9k+2\sqrt{9k^2-5}}=1-\frac{18}{9+2\sqrt{9-5/k^2}}$.

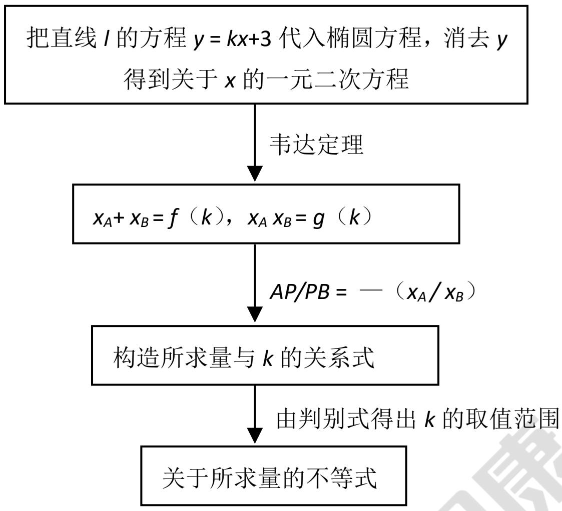
由 $\Delta=(-54k)^2-180(9k^2+4)\geq0$，解得 $k^2\geq\frac{5}{9}$，

所以 $-1\leq1-\frac{18}{9+2\sqrt{9-5/k^2}}<-\frac{1}{5}$，

综上 $-1\leq\frac{AP}{PB}\leq-\frac{1}{5}$.

分析2: 如果想构造关于所求量的不等式，则应该考虑到：判别式往往是产生不等的根源. 由判别式值的非负性可以很快确定k的取值范围，于是问题转化为如何将所求量与k联系起来. 一般来说，韦达定理总是充当这种问题的桥梁，但本题无法直接应用韦达定理，原因

在于$\frac{AP}{PB}=-\frac{x_1}{x_2}$不是关于$x_1,x_2$的对称关系式. 原因找到后，解决问题的方法自然也就有了，即我们可以构造关于x_1,x_2的对称关系式.



简解 2：设直线l的方程为：$y=kx+3$，代入椭圆方程，消去y得

$$(9k^2+4)x^2+54kx+45=0 \qquad (*)$$

则 $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-54k}{9k^2+4}, \\ x_1x_2=\dfrac{45}{9k^2+4}. \end{cases}$

令$\frac{x_1}{x_2}=\lambda$，则，$\lambda+\frac{1}{\lambda}+2=\frac{324k^2}{45k^2+20}$.

在（*）中，由判别式$\Delta\geq 0$, 可得 $k^2\geq\frac{5}{9}$，

从而有 $4\le\frac{324k^2}{45k^2+20}\le\frac{36}{5}$，所以 $4\le\lambda+\frac{1}{\lambda}+2\le\frac{36}{5}$，解得 $\frac{1}{5}\le\lambda\le5$.

结合 $0<\lambda\le1$ 得 $\frac{1}{5}\le\lambda\le1$.

综上，$-1\le\frac{AP}{PB}\le-\frac{1}{5}$.

点评：范围问题不等关系的建立途径多多，诸如判别式法，均值不等式法，变量的有界性法，函数的性质法，数形结合法等等. 本题也可从数形结合的角度入手，给出又一优美解法.

解题犹如打仗，不能只是忙于冲锋陷阵，一时局部的胜利并不能说明问题，有时甚至会被局部所纠缠而看不清问题的实质所在，只有见微知著，树立全局观念，讲究排兵布阵，运筹帷幄，方能决胜千里.

第三、推理训练：数学推理是由已知的数学命题得出新命题的基本思维形式，它是数学求解的核心。以已知的真实数学命题，即定义、公理、定理、性质等为依据，选择恰当的解题方法，达到解题目标，得出结论的一系列推理过程。在推理过程中，必须注意所使用的命题之间的相互关系（充分性、必要性、充要性等），做到思考缜密、推理严密。通过编写思维流程图来锤炼自己的大脑，快速提高解题能力。

例 6 椭圆长轴端点为 A,B，O 为椭圆中心，F 为椭圆的右焦点，且 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{FB}=1$，$\left|\overrightarrow{OF}\right|=1$.

（Ⅰ）求椭圆的标准方程；

（Ⅱ）记椭圆的上顶点为 M，直线 l 交椭圆于 P,Q 两点，问：是否存在直线 l，使点 F 恰为 ΔPQM 的垂心？若存在，求出直线 l 的方程；若不存在，请说明理由。

思维流程：

（Ⅰ）由 $\overrightarrow{AF}\bullet\overrightarrow{FB}=1$，$|\overrightarrow{OF}|=1$ → $(a+c)(a-c)=1$，$c=1$ → $a=\sqrt{2},b=1$ → 写出椭圆方程

（Ⅱ）由 F 为 ΔPQM 的重心 → $PQ\perp MF,MP\perp FQ$ → $k_{PO}=1$

→ $\begin{cases} y=x+m \\ x^2+2y^2=2 \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{消}}$ $3x^2+4mx+2m^2-2=0$

→ 两根之和，两根之积 → $\overrightarrow{MP}\bullet\overrightarrow{FQ}=0$ → 得出关于 m 的方程 → 解出 m

解题过程：

（Ⅰ）如图建系，设椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，则 $c=1$

又 $\because \overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{FB}=1$ 即 $(a+c)\cdot(a-c)=1=a^2-c^2$，$\therefore a^2=2$

故椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$

（Ⅱ）假设存在直线l交椭圆于P,Q两点，且F恰为ΔPQM的垂心，则

设$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，$\because M(0,1),F(1,0)$，故$k_{PQ}=1$，

于是设直线l为 $y=x+m$，由$\begin{cases} y=x+m \\ x^2+2y^2=2 \end{cases}$得，

$3x^2+4mx+2m^2-2=0$

$\because \overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{FQ}=0=x_1(x_2-1)+y_2(y_1-1)$ 又$y_i=x_i+m(i=1,2)$

得$x_1(x_2-1)+(x_2+m)(x_1+m-1)=0$ 即

$2x_1x_2+(x_1+x_2)(m-1)+m^2-m=0$ 由韦达定理得

$2\cdot\dfrac{2m^2-2}{3}-\dfrac{4m}{3}(m-1)+m^2-m=0$

解得$m=-\dfrac{4}{3}$或$m=1$（舍） 经检验$m=-\dfrac{4}{3}$符合条件.

点石成金：垂心的特点是垂心与顶点的连线垂直对边，然后转化为两向量乘积为零.

例7、已知椭圆E的中心在坐标原点，焦点在坐标轴上，且经过$A(-2,0)$、$B(2,0)$、$C\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$三点.

（Ⅰ）求椭圆E的方程：

（Ⅱ）若点D为椭圆E上不同于A、B的任意一点，$F(-1,0),H(1,0)$，当ΔDFH内切圆的面积最大时，求ΔDFH内心的坐标；

思维流程：

（Ⅰ）$\boxed{\text{由椭圆经过A、B、C三点}}$ $\longrightarrow$ $\boxed{\text{设方程为}\ mx^2+ny^2=1}$ $\longrightarrow$ $\boxed{\text{得到}\ m,n\ \text{的方程}}$ $\longrightarrow$ $\boxed{\text{解出}\ m,n}$

（Ⅱ） 由 ΔDFH 内切圆面积最大 $\longrightarrow$ 转化为 ΔDFH 面积最大

$\longrightarrow$ 转化为点 D 的纵坐标的绝对值最大最大 $\longrightarrow$ D 为椭圆短轴端点

$\longrightarrow$ ΔDFH 面积最大值为 $\sqrt{3}$ $\longrightarrow$ $S_{\Delta DFH}=\frac{1}{2}\times$周长$\times r_{内切圆}$ $\longrightarrow$ $r_{内切圆}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\longrightarrow$ 得出 D 点坐标为 $\left(0,\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

解题过程： （Ⅰ）设椭圆方程为 $mx^2+ny^2=1\ (m>0,n>0)$，将 $A(-2,0)$、$B(2,0)$、$C(1,\frac{3}{2})$ 代入椭圆 E 的方程，得

$\begin{cases}4m=1,\\ m+\frac{9}{4}n=1\end{cases}$ 解得 $m=\frac{1}{4},n=\frac{1}{3}$. $\therefore$ 椭圆 E 的方程 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

（Ⅱ）$|FH|=2$，设 ΔDFH 边上的高为 $S_{\Delta DFH}=\frac{1}{2}\times2\times h=h$

当点 D 在椭圆的上顶点时，h 最大为 $\sqrt{3}$，所以 $S_{\Delta DFH}$ 的最大值为 $\sqrt{3}$.

设 ΔDFH 的内切圆的半径为 R，因为 ΔDFH 的周长为定值 6．所以，

$S_{\Delta DFH}=\frac{1}{2}R\times6$

所以R的最大值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$．所以内切圆圆心的坐标为$(0,\frac{\sqrt{3}}{3})$．

点石成金： $S_{\Delta的内切圆}=\frac{1}{2}\times\Delta的周长\times r_{\Delta的内切圆}$

例 8、**已知定点$C(-1,0)$及椭圆$x^2+3y^2=5$，过点C的动直线与椭圆相交于A，B两点.**

（Ⅰ）若线段AB中点的横坐标是$-\frac{1}{2}$，求直线AB的方程；

（Ⅱ）在x轴上是否存在点M，使$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$为常数？若存在，求出点$M$的坐标；若不存在，请说明理由.

思维流程：

（Ⅰ）解：依题意，直线AB的斜率存在，设直线AB的方程为$y=k(x+1)$，

将$y=k(x+1)$代入$x^2+3y^2=5$，　消去y整理得　$(3k^2+1)x^2+6k^2x+3k^2-5=0.$

设$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，

$$则\begin{cases}\Delta=36k^4-4(3k^2+1)(3k^2-5)>0, & (1)\\ x_1+x_2=-\frac{6k^2}{3k^2+1}. & (2)\end{cases}$$

由线段AB中点的横坐标是$-\frac{1}{2}$，　得$\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{3k^2}{3k^2+1}=-\frac{1}{2}$，解得$k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，符合题意。

所以直线AB的方程为　$x-\sqrt{3}y+1=0$，或　$x+\sqrt{3}y+1=0$.

（Ⅱ）解：假设在x轴上存在点$M(m,0)$，使$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$为常数.

① 当直线AB与x轴不垂直时，由（Ⅰ）知

$$x_1+x_2=-\frac{6k^2}{3k^2+1},\quad x_1x_2=\frac{3k^2-5}{3k^2+1}. \qquad (3)$$

所以$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(x_1-m)(x_2-m)+y_1y_2=(x_1-m)(x_2-m)+k^2(x_1+1)(x_2+1)$

$=(k^2+1)x_1x_2+(k^2-m)(x_1+x_2)+k^2+m^2$. 将(3)代入，整理得

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\frac{(6m-1)k^2-5}{3k^2+1}+m^2=\frac{(2m-\frac{1}{3})(3k^2+1)-2m-\frac{14}{3}}{3k^2+1}+m^2$$

$$=m^2+2m-\frac{1}{3}-\frac{6m+14}{3(3k^2+1)}.$$

注意到$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$是与$k$无关的常数，从而有$6m+14=0$，$m=-\frac{7}{3}$，此时$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\frac{4}{9}$.

② 当直线 AB 与 x 轴垂直时，此时点 A, B 的坐标分别为$\left(-1,\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$、$\left(-1,-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$，当$m=-\frac{7}{3}$时，亦有$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\frac{4}{9}$.

综上，在x轴上存在定点$M\left(-\frac{7}{3},0\right)$，使$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$为常数.

点石成金：$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\frac{(6m-1)k^2-5}{3k^2+1}+m^2=\frac{(2m-\frac{1}{3})(3k^2+1)-2m-\frac{14}{3}}{3k^2+1}+m^2$

$$=m^2+2m-\frac{1}{3}-\frac{6m+14}{3(3k^2+1)}.$$

例 9、**已知椭圆的中心在原点，焦点在 x 轴上，长轴长是短轴长的 2 倍且经过点 M（2，1），平行于 OM 的直线l在 y 轴上的截距为 m（m ≠0），l交椭圆于 A、B 两个不同点。**

（Ⅰ）求椭圆的方程；

（Ⅱ）求 m 的取值范围；

（Ⅲ）求证直线 MA、MB 与 x 轴始终围成一个等腰三角形.

思维流程：

解：（1）设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$

则$\begin{cases}a=2b\\ \frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1\end{cases}$解得$\begin{cases}a^2=8\\ b^2=2\end{cases}$　　　　$\therefore$椭圆方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$

（Ⅱ）∵直线 l 平行于 OM，且在 y 轴上的截距为 m

又 $K_{OM}=\frac{1}{2}$　　　　　$\therefore l$的方程为：$y=\frac{1}{2}x+m$

由$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+m \\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1 \end{cases}$ $\therefore x^2+2mx+2m^2-4=0$

∵ 直 线 l 与 椭 圆 交 于 A 、 B 两 个 不 同 点 ，

$\therefore \Delta=(2m)^2-4(2m^2-4)>0,$

解得$-2<m<2,$且$m\neq 0$

（Ⅲ）设直线 MA、MB 的斜率分别为 k_1，k_2，只需证明 $k_1+k_2=0$ 即可

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),$且$x_1+x_2=-2m,x_1x_2=2m^2-4$

则$k_1=\frac{y_1-1}{x_1-2},k_2=\frac{y_2-1}{x_2-2}$

由$x_2+2mx+2m^2-4=0$可得

$x_1+x_2+-2m,x_1x_2=2m^2-4$

而$k_1+k_2=\frac{y_1-1}{x_1-2}+\frac{y_2-1}{x_2-2}=\frac{(y_1-1)-(x_2-2)+(y_2-1)(x_1-2)}{(x_1-2)(x_2-2)}$

$$=\frac{(\frac{1}{2}x_1+m-1)(x_2-2)+(\frac{1}{2}x_2+m-1)(x_1-2)}{(x_1-2)(x_2-2)}$$

$$=\frac{x_1x_2+(m+2)(x_1+x_2)-4(m-1)}{(x_1-2)(x_2-2)}$$

$$=\frac{2m^2-4+(m-2)(-2m)-4(m-1)}{(x_1-2)(x_2-2)}$$

$$=\frac{2m^2-4-2m^2+4m-4m+4}{(x_1-2)(x_2-2)}=0$$

$\therefore k_1+k_2=0$

故直线 MA、MB 与 x 轴始终围成一个等腰三角形.

点石成金:直线MA、MB与x轴始终围成一个等腰三角形 $\Leftrightarrow k_1+k_2=0$

例10、已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的离心率 $e=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，过 $A(a,0),B(0,-b)$ 的直线到原点的距离是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（1）求双曲线的方程;

（2）已知直线 $y=kx+5(k\neq 0)$ 交双曲线于不同的点C，D且 C, D 都在以 B 为圆心的圆上，求 k 的值.

思维流程:

解：∵（1）$\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，原点到直线 AB：$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1$ 的距离

$$d=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{ab}{c}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore b=1, a=\sqrt{3}.$$

故所求双曲线方程为 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$.

（2）把 $y=kx+5$ 代入 $x^2-3y^2=3$ 中消去 y，整理得 $(1-3k^2)x^2-30kx-78=0$.

设 $C(x_1,y_1),D(x_2,y_2),CD$ 的中点是 $E(x_0,y_0)$，则

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{15k}{1-3k^2}\cdot y_0=kx_0+5=\frac{5}{1-3k^2},$$

$$k_{BE}=\frac{y_0+1}{x_0}=-\frac{1}{k}.$$

$$\therefore x_0+ky_0+k=0,$$

即 $\frac{15k}{1-3k^2}+\frac{5k}{1-3k^2}+k=0$，又 $k\neq 0$，$\therefore k^2=7$

故所求 $k=\pm\sqrt{7}$.

点石成金: C，D 都在以 B 为圆心的圆上 $\Leftrightarrow$ BC=BD $\Leftrightarrow$ BE $\perp$ CD;

例 11、**已知椭圆 C 的中心在坐标原点，焦点在 x 轴上，椭圆 C 上的点到焦点距离的最大值为 3，最小值为 1．**

（Ⅰ）求椭圆 C 的标准方程;

(II) 若直线 $l:y=kx+m$ 与椭圆 C 相交于 A、B 两点（A、B 不是左右顶点），且以 AB 为直径的圆过椭圆 C 的右顶点．求证：直线 l 过定点，并求出该定点的坐标．

思维流程:

解:（Ⅰ）由题意设椭圆的标准方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，

由已知得：$a+c=3$，$a-c=1$，

$a=2$，$c=1$，
$\therefore b^2=a^2-c^2=3$　　$\therefore$ 椭圆的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$．

(II) 设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$．

联立 $\begin{cases} y=kx+m, \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1. \end{cases}$

得 $(3+4k^2)x^2+8mkx+4(m^2-3)=0$，则

$$\begin{cases} \Delta=64m^2k^2-16(3+4k^2)(m^2-3)>0，\text{即}3+4k^2-m^2>0， \\ x_1+x_2=-\dfrac{8mk}{3+4k^2}, \\ x_1x_2=\dfrac{4(m^2-3)}{3+4k^2}. \end{cases}$$

又 $y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+mk(x_1+x_2)+m^2=\dfrac{3(m^2-4k^2)}{3+4k^2}$．

因为以 AB 为直径的圆过椭圆的右顶点 $D(2,0)$，

$\therefore k_{AD}k_{BD}=-1$，即 $\dfrac{y_1}{x_1-2}\cdot\dfrac{y_2}{x_2-2}=-1$．　$\therefore y_1y_2+x_1x_2-2(x_1+x_2)+4=0$．

$\therefore \frac{3(m^2-4k^2)}{3+4k^2}+\frac{4(m^2-3)}{3+4k^2}+\frac{15mk}{3+4k^2}+4=0$． $\therefore 7m^2+16mk+4k^2=0$．

解得：$m_1=-2k$，$m_2=-\frac{2k}{7}$，且均满足$3+4k^2-m^2>0$．

当$m_1=-2k$时，l的方程$y=k(x-2)$，直线过点$(2,0)$，与已知矛盾；

当$m_2=-\frac{2k}{7}$时，l的方程为$y=k\left(x-\frac{2}{7}\right)$，直线过定点$\left(\frac{2}{7},0\right)$.

所以，直线l过定点，定点坐标为$\left(\frac{2}{7},0\right)$.

点石成金：以 AB 为直径的圆过椭圆 C 的右顶点$\Leftrightarrow$ CA$\perp$CB;

例 12、已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左右两个焦点分别为$F_1$、$F_2$，点 P 在双曲线右支上.

（Ⅰ）若当点 P 的坐标为$(\frac{3\sqrt{41}}{5},\frac{16}{5})$时,$\overrightarrow{PF_1}\perp\overrightarrow{PF_2}$,求双曲线的方程;

（Ⅱ）若$|\overrightarrow{PF_1}|=3|\overrightarrow{PF_2}|$,求双曲线离心率$e$的最值,并写出此时双曲线的渐进线方程.

思维流程:

解:（Ⅰ）(法一)由题意知,$\overrightarrow{PF_1}=(-c-\frac{3\sqrt{41}}{5},-\frac{16}{5})$，$\overrightarrow{PF_2}=(c-\frac{3\sqrt{41}}{5},-\frac{16}{5})$，

$\because \overrightarrow{PF_1}\perp\overrightarrow{PF_2}$,$\therefore \overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$, $\therefore (-c-\frac{3\sqrt{41}}{5})\ (c-\frac{3\sqrt{41}}{5})+(-\frac{16}{5})^2=0$ （1 分）

解得 $c^2=25,\therefore c=5$． 由双曲线定义得: $|\overrightarrow{PF_1}|-|\overrightarrow{PF_2}|=2a$,

$$\therefore 2a=\sqrt{(-5-\frac{3\sqrt{41}}{5})^2+(-\frac{16}{5})^2}-\sqrt{(5-\frac{3\sqrt{41}}{5})^2+(-\frac{16}{5})^2}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{41}+3)^2}-\sqrt{(\sqrt{41}-3)^2}=6,\therefore a=3,b=4$$

$\therefore$所求双曲线的方程为: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

(法二) 因$\overrightarrow{PF_1}\perp\overrightarrow{PF_2}$,由斜率之积为$-1$,可得解.

（Ⅱ）设$|\overrightarrow{PF_1}|=r_1,|\overrightarrow{PF_2}|=r_2$，

（法一）设 P 的坐标为 $(x_\circ,y_\circ)$，由焦半径公式得 $r_1=|a+ex_\circ|=a+ex_\circ,r_2=|a-ex_\circ|=ex_\circ-a$，

$\because r_1=3r_2,\therefore a+ex_\circ=3(ex_\circ-a),\therefore x_\circ=\dfrac{2a^2}{c},\because x_\circ\ge a,\therefore\dfrac{2a^2}{c}\ge a,\therefore 2a\ge c$，

$\therefore e$的最大值为 2,无最小值. 此时$\dfrac{c}{a}=2,\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{c^2-a^2}}{a}=\sqrt{e^2-1}=\sqrt{3}$,

$\therefore$此时双曲线的渐进线方程为$y=\pm\sqrt{3}x$

(法二)设$\angle F_1PF_2=\theta,\theta\in(0,\pi]$.

(1)当$\theta=\pi$时，$\because r_1+r_2=2c$,且$r_1=3r_2,\therefore 2c=4r_2$，$2a=r_1-r_2=2r_2$

此时 $e=\dfrac{2c}{2a}=\dfrac{4r_2}{2r_2}=2$.

(2)当$\theta\in(0,\pi)$,由余弦定理得:

$(2c)^2=r_1{}^2+r_2{}^2-2r_1r_2\cos\theta=10r_2{}^2-6r_2{}^2\cos\theta$ $\therefore$

$e=\dfrac{2c}{2a}=\dfrac{r_2\cdot\sqrt{10-6\cos\theta}}{2r_2}=\dfrac{\sqrt{10-6\cos\theta}}{2}$,

$\because\cos\theta\in(-1,1)$,$\therefore e\in(1,2)$,综上,$e$的最大值为 2,但$e$无最小值. (以下法一)