23．已知：Rt△*ABC*的斜边长为5，斜边上的高为2，将这个直角三角形放置在平面直角坐标系中，使其斜边*AB*与*x*轴重合（其中*OA*＜*OB*），直角顶点*C*落在*y*轴正半轴上（如图1）．

（1）求线段*OA*、*OB*的长和经过点*A*、*B*、*C*的抛物线的关系式．

（2）如图2，点*D*的坐标为（2，0），点*P*（*m*，*n*）是该抛物线上的一个动点（其中*m*＞0，*n*＞0），连接*DP*交*BC*于点*E*．

①当△*BDE*是等腰三角形时，直接写出此时点*E*的坐标．

②又连接*CD*、*CP*（如图3），△*CDP*是否有最大面积？若有，求出△*CDP*的最大面积和此时点*P*的坐标；若没有，请说明理由．

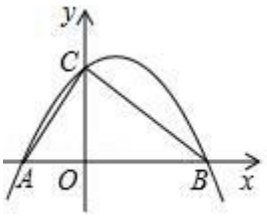


图1

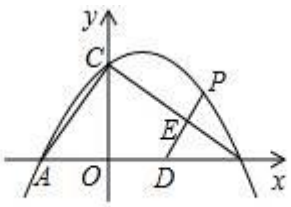


图2

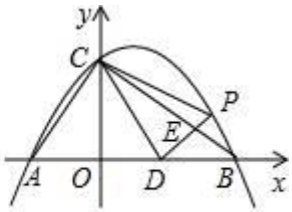


图3

23．解：（1）设*OA*的长为*x*，则*OB*＝5－*x*；

∵*OC*＝2，*AB*＝5，∠*BOC*＝∠*AOC*＝90°，∠*OAC*＝∠*OCB*；

∴△*AOC*∽△*COB*，∴$OC^2=OA\cdot OB$

∴$2^2=x(5-x)$ …（1分）

解得：$x_1=1$，$x_2=4$，

∵*OA*＜*OB*，∴*OA*＝1，*OB*＝4； …（2分）

∴点*A*、*B*、*C*的坐标分别是：*A*（－1，0），*B*（4，0），*C*（0，2）；

（注：直接用射影定理的，不扣分）

方法一：设经过点*A*、*B*、*C*的抛物线的关系式为：$y=ax^2+bx+2$，

将*A*、*B*、*C*三点的坐标代入得$\begin{cases}a-b+2=0\\16a+4b+2=0\\c=2\end{cases}$…（3分）

解得：$a=-\frac{1}{2}$，$b=\frac{3}{2}$，$c=2$

所以这个二次函数的表达式为：$y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2$…（4分）

方法二：设过点*A*、*B*、*C*的抛物线的关系式为：*y*＝*a*（*x*+1）（*x*－4）…（3分）

将 C 点的坐标代入得：$a=-\frac{1}{2}$

所以这个二次函数的表达式为：$y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2$…（4 分）

（注：表达式的最终结果用三种形式中的任一种都不扣分）

（2）①当△BDE 是等腰三角形时，点 E 的坐标分别是：$(3,\frac{1}{2})$，$(\frac{4}{5},\frac{8}{5})$，$(4-\frac{4\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5})$.

…1+1+（1 分）

（注：符合条件的 E 点共有三个，其坐标，写对一个给 1 分）

②如图 1，连接 OP，

$S_{\triangle CDP}=S_{四边形\ CODP}-S_{\triangle COD}=S_{\triangle COP}+S_{\triangle ODP}-S_{\triangle COD}$ …（8 分）

$=\frac{1}{2}\times 2m+\frac{1}{2}\times 2n-\frac{1}{2}\times 2\times 2=m+n-2$

$=-\frac{1}{2}m^2+\frac{5}{2}m=-\frac{1}{2}(m-\frac{5}{2})^2+\frac{25}{8}$…（9 分）

∴当 $m=\frac{5}{2}$时，△CDP 的面积最大．此时 P 点的坐标为（$\frac{5}{2}$，$\frac{21}{8}$），

$S_{\triangle CDP}$的最大值是$\frac{25}{8}$. …（10 分）

另解：如图 2、图 3，过点 P 作 $PF\perp x$ 轴于点 F，则

$S_{\triangle CDP}=S_{梯形\ COFP}-S_{\triangle COD}-S_{\triangle DFP}$ …（8 分）

$=\frac{1}{2}\times(2+n)m-\frac{1}{2}\times 2\times 2-\frac{1}{2}\times|m-2|\cdot n=m+n-2$

$=-\frac{1}{2}m^2+\frac{5}{2}m=-\frac{1}{2}(m-\frac{5}{2})^2+\frac{25}{8}$…（9 分）

∴当 $m=\frac{5}{2}$时，△CDP 的面积最大．此时 P 点的坐标为（$\frac{5}{2}$，$\frac{21}{8}$），

$S_{\triangle CDP}$的最大值是$\frac{25}{8}$.

（注：只回答有最大面积，而没有说明理由的，不给分；点 P 的坐标，或最大面积计算错误的，扣（1 分）；其他解法只要合理，酌情给分.）

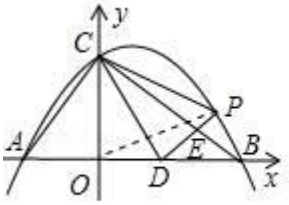


图1

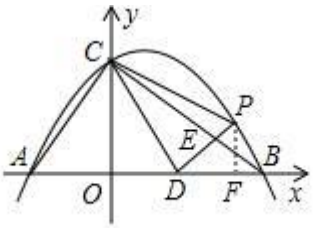


图2

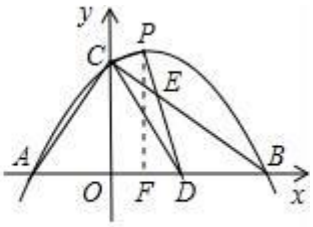


图3