27．如图 1，抛物线 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）的顶点为 C（1，4），交 x 轴于 A、B 两点，交 y 轴于点 D，其中点 B 的坐标为（3，0）．

（1）求抛物线的解析式；

（2）如图 2，过点 A 的直线与抛物线交于点 E，交 y 轴于点 F，其中点 E 的横坐标为 2，若直线 PQ 为抛物线的对称轴，点 G 为直线 PQ 上的一动点，则 x 轴上是否存在一点 H，使 D、G，H、F 四点所围成的四边形周长最小？若存在，求出这个最小值及点 G、H 的坐标；若不存在，请说明理由；

（3）如图 3，在抛物线上是否存在一点 T，过点 T 作 x 轴的垂线，垂足为点 M，过点 M 作 $MN//BD$，交线段 AD 于点 N，连接 MD，使△DNM∽△BMD？若存在，求出点 T 的坐标；若不存在，请说明理由．

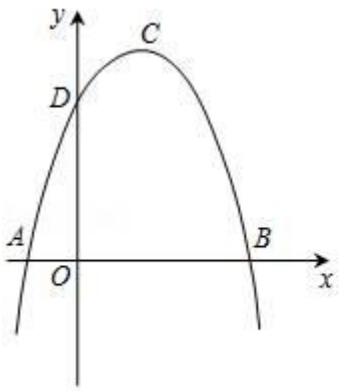


图 1

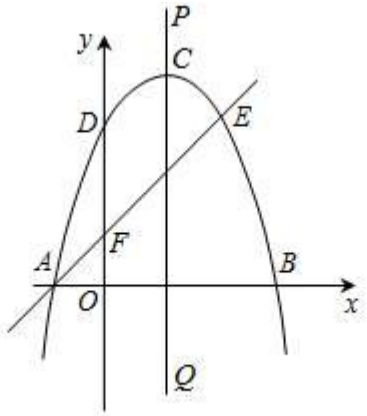


图 2

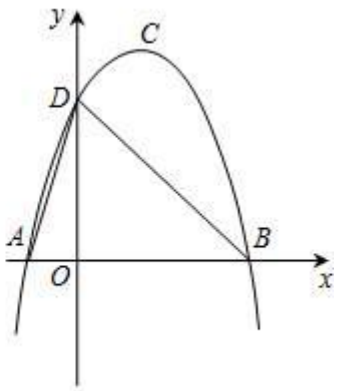


图 3

27．解：（1）设抛物线的解析式为：$y=a(x-1)^2+4$，

∵点 B 的坐标为（3，0）．

∴$4a+4=0$，

∴$a=-1$，

∴此抛物线的解析式为：$y=-(x-1)^2+4=-x^2+2x+3$；

（2）存在．

抛物线的对称轴方程为：$x=1$，

∵点 E 的横坐标为 2，

∴$y=-4+4+3=3$，

∴点 E（2，3），

∴设直线 AE 的解析式为：$y=kx+b$，

$\therefore \begin{cases} -k+b=0 \\ 2k+b=3 \end{cases}$，

$\therefore \begin{cases} k=1 \\ b=1 \end{cases}$，

∴直线 AE 的解析式为：$y=x+1$，

∴点 F（0，1），

∵D（0，3），

∴D 与 E 关于 $x=1$ 对称，

作 F 关于 x 轴的对称点 F'（0，－1），

连接 EF' 交 x 轴于 H，交对称轴 $x=1$ 于 G，

四边形 $DFHG$ 的周长即为最小，

设直线 EF' 的解析式为：$y=mx+n$，

$\therefore \begin{cases} n=-1 \\ 2m+n=3 \end{cases}$，

解得：$\begin{cases} m=2 \\ n=-1 \end{cases}$，

∴直线 EF' 的解析式为：$y=2x-1$，

∴当 $y=0$ 时，$2x-1=0$，得 $x=\frac{1}{2}$，

即 H（$\frac{1}{2}$，0），

当 $x=1$ 时，$y=1$，

∴G（1，1）；

∴$DF=2$，$FH=F'H=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+1^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$DG=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，

∴使 D、G、H、F 四点所围成的四边形周长最小值为：$DF+FH+GH+DG=2+\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}+\sqrt{5}=2+2\sqrt{5}$；

（3）存在.

∵$BD=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$，

设 M（c，0），

∵$MN // BD$，

∴$\frac{MN}{BD}=\frac{AM}{AB}$，

即$\frac{MN}{3\sqrt{2}}=\frac{1+c}{4}$，

∴$MN=\frac{3\sqrt{2}}{4}(1+c)$，$DM=\sqrt{3^2+c^2}$，

要使△DNM∽△BMD，

需$\frac{DM}{BD}=\frac{MN}{DM}$，即 $DM^2=BD\cdot MN$，

可得：$9+c^2=3\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{4}(1+c)$，

解得：$c=\frac{3}{2}$或 $c=3$（舍去）.

当 $x=\frac{3}{2}$时，$y=-(\frac{3}{2}-1)^2+4=\frac{15}{4}$.

∴存在，点 T的坐标为（$\frac{3}{2}$，$\frac{15}{4}$）.

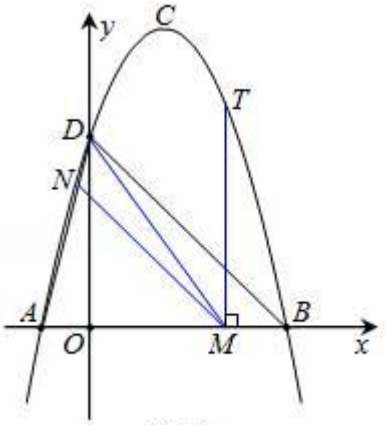


图 3

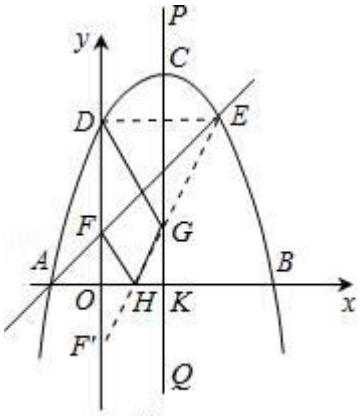


图 2