衔接点 06 函数的最值及函数值的范围

【基础内容与方法】
主要根据函数的性质求函数的最值及函数值的范围，同时兼顾函数的图像，关注函数图像的最高点与最低点.

类型一：基本类型

例 1：已知函数 $y=-\frac{3}{2}(x+2)^2+9$.

(1) 抛物线的开口向__________、对称轴为直线__________、顶点坐标__________；

(2) 当 $x=$__________时，函数有最__________值，是__________；

(3) 当 x__________时，y 随 x 的增大而增大；当 x__________时，y 随 x 的增大而减小；

(4) 该函数图象可由 $y=-\frac{3}{2}x^2$ 的图象经过怎样的平移得到的？

【答案】(1) 下　$x=-2,(-2,9)$；　(2) -2；大；9；　(3) $<-2,>-2$；　(4) 向左 2 个，向上平移 9 个单位.

【解析】（1），（2），（3）由于是二次函数，由此可以确定函数的图像的形状，根据二次项系数可以确定开口方向，根据抛物线的顶点式解析式可以确定其顶点的坐标，对称轴及增减性；

（4）根据左加右减，上加下减可得出答案.

解：由二次函数 $y=-\frac{3}{2}(x+2)^2+9$ 可得

（1）抛物线的开口方向向下，对称轴为直线 x=-2，顶点坐标为(-2,9).

（2）当 x=-2 时，函数 y 有最大值，是 9.

（3）当 x＜-2 时，函数 y 随 x 的增大而增大，当 x＞-2 时，函数 y 随 x 的增大而减小.

（4）函数 $y=-\frac{3}{2}x^2$ 的图像先向左平移 2 个单位，再向上平移 9 个单位即可得到 $y=-\frac{3}{2}(x+2)^2+9$.

故答案为 (1) 下　$x=-2,(-2,9)$；　(2) -2；大；9；　(3) $<-2,>-2$；　(4) 向左 2 个，向上平移 9 个单位.

【点睛】本题主要考查了二次函数的性质与图像的平移. 掌握二次函数的顶点式 $y=a(x-h)^2+k$ 对应的开口方向，对称轴，顶点坐标是解题的关键.

考点练习一

1．已知二次函数 $f(x)=x^2-2x-4$ 在区间 $[-2,a]$ 上的最小值为 -5，最大值为 4，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$(-2,1)$　　　　B．$(-2,4]$　　　　C．$[1,4]$　　　　D．$[1,+\infty)$

【答案】C

【解析】根据二次函数对称轴与定义区间位置关系分析确定实数 a 满足的条件.

因为 $f(1)=-5$，$f(-2)=f(4)=4$，对称轴为 $x=1$，

所以实数 a 的取值范围是 $[1,4]$,选 C.

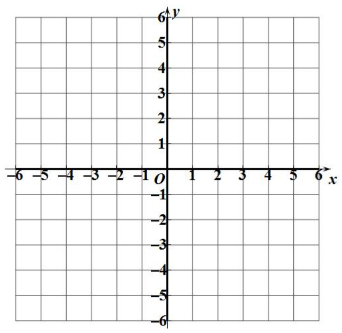
【点睛】本题考查二次函数最值，考查基本分析求解能力，属基础题.

2．二次函数图象上部分点的横坐标 x，纵坐标 y 的对应值如下表：

x	…	-4	-3	-2	-1	0	1	…
y	…	5	0	-3	-4	-3	m	…

（1）m=______；

（2）在图中画出这个二次函数的图象；



（3）当 $y\geqslant 5$ 时，x 的取值范围是________；

（4）当 $-4<x<1$ 时，y 的取值范围是________.

【答案】（1）0；（2）见解析；（3）x≤-4 或 x≥2；（4）-4≤y＜5．

【解析】（1）先确定出对称轴，根据抛物线的对称性即可求得；

（2）根据二次函数图象的画法作出图象即可；

（3）根据抛物线的对称性，（-4，5）关于直线 x=-1 的对称点是（2，5），根据图象即可求得结论，

（4）根据函数图象，写 y 的取值范围即可．

解：（1）由图表可知抛物线的顶点坐标为（-1，-4），

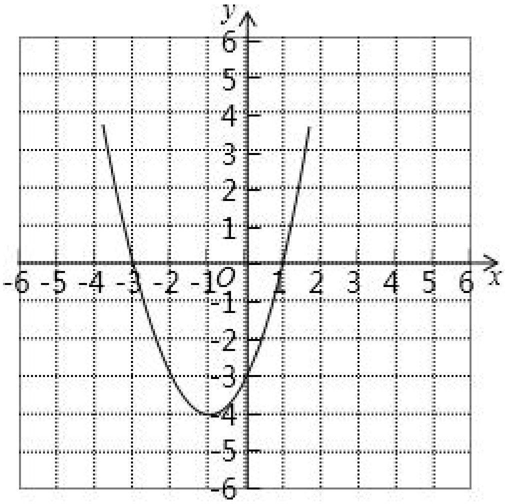
∴抛物线的对称轴为直线 x=-1，

∵（-3，0）关于直线 x=-1 的对称点是（1，0），

∴m=0，

故答案为：0；

（2）函数图象如图所示；



（3）∵（-4，5）关于直线 x=-1 的对称点是（2，5），

由图象可知当 y≥5 时，x 的取值范围是 x≤-4 或 x≥2，

故答案为 x≤-4 或 x≥2；

（4）由图象可知当-4＜x＜1 时，y 的取值范围是-4≤y＜5，

故答案为-4≤y＜5．

【点睛】此题考查二次函数的图象，二次函数的性质，解题关键在于数形结合．

3．已知点 A（t，1）为函数 $y=ax^2+bx+4$（a，b 为常数，且 $a\neq0$）与 $y=x$ 图象的交点．

（1）求 t；

（2）若函数 $y=ax^2+bx+4$ 的图象与 x 轴只有一个交点，求 a，b；

（3）若 $1\leq a\leq2$，设当 $\frac{1}{2}\leq x\leq2$ 时，函数 $y=ax^2+bx+4$ 的最大值为 m，最小值为 n，求 $m-n$ 的最小值．

【答案】（1）$t=1$；（2）$\begin{cases}a=1\\b=-4\end{cases}$或$\begin{cases}a=9\\b=-12\end{cases}$；（3）$m-n$ 的最小值$\frac{9}{8}$．

【解析】（1）把 A（t，1）代入 y=x 即可得到结论；

（2）根据题意得方程组，解方程组即可得到结论；

（3）把 A（1，1）代入 y=ax2＋bx＋4 得，b=−3−a，得到 y=ax2−（a＋3）x＋4 的对称轴为直线 $x=\frac{a+3}{2a}$，

根据1≤a≤2，得到对称轴的取值范围$\frac{1}{2}$≤x≤2，当x＝$\frac{1}{2}$时，得到m＝$-\frac{a}{4}+\frac{5}{2}$，当x＝2时，得到n＝$-\frac{a}{4}-\frac{9}{4a}+\frac{5}{2}$，即可得到结论.

解：（1）把A（t，1）代入$y=x$得$t=1$；

（2）∵$y=ax^2+bx+4$的图象与x轴只有一个交点，

∴$\begin{cases} a+b+4=1 \\ \Delta=b^2-16a=0 \end{cases}$，∴$\begin{cases} a=1 \\ b=-4 \end{cases}$或$\begin{cases} a=9 \\ b=-12 \end{cases}$；

（3）把A（1，1）代入$y=ax^2+bx+4$得，$b=-3-a$，

∴$y=ax^2-(a+3)x+4=a\left(x-\frac{a+3}{2a}\right)^2-\frac{a}{4}-\frac{9}{4a}+\frac{5}{2}$，

∴对称轴为直线$x=\frac{a+3}{2a}$，

∵$1\le a\le 2$，

∴$\frac{5}{4}\le x=\frac{a+3}{2a}\le 2$，

∵$\frac{1}{2}\le x\le 2$，

∴当$x=\frac{1}{2}$时，$y=ax^2+bx+4$的最大值为$m=-\frac{a}{4}+\frac{5}{2}$，

当$x=2$时，$n=-\frac{a}{4}-\frac{9}{4a}+\frac{5}{2}$，

∴$m-n=\frac{9}{4a}$，

∵$1\le a\le 2$，

∴当$a=2$时，$m-n$的值最小，

即$m-n$的最小值$\frac{9}{8}$.

【点睛】本题考查抛物线与x轴的交点，二次函数的最值，正确的理解题意是解题的关键.

类型二：最值问题的进阶

例2：设函数$f(x)=|2x-1|+|x+1|$的最小值为m，求m的值.

【答案】$m=\frac{3}{2}$

【解析】对函数$f(x)$进行分类讨论去掉绝对值，求解即可.

解：当$x\le -1$时，$f(x)=-3x\ge 3$；

当$-1<x<\frac{1}{2}$时，$f(x)=2-x\in(\frac{3}{2},3)$；

当 $x \geq \frac{1}{2}$ 时，$f(x)=3x \geq \frac{3}{2}$.

所以 $f(x)$ 取得最小值 $m=\frac{3}{2}$.

可以画出分段函数的图像，最小值便显而易见了.

【点睛】本题主要考查绝对值不等式的性质和基本不等式的运用，同时考查分类讨论思想，属于基础题.

考点练习二

4．函数 $f(x)=x^2-2x+3$ 在闭区间［0,m］上最大值为 3，最小值为 2，则 m 的取值范围为____.

【答案】$[1,2]$

【解析】由题可知函数是开口向上，对称轴为 1 的二次函数，所以函数的最小值在对称轴取得，即 $f(1)=2$，而最大值只能在区间端点值取得，由因为 $f(0)=3$，所以根据对称性得 $f(2)=3$，所以 m 的取值范围是 $1 \leq m \leq 2$.

5．已知函数 $f(x)=x(x-2a)$，$a \in R$

（1）若 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上是增函数，求 a 的取值范围；

（2）若 $a=1$，求函数 $f(x)$ 在区间 $[0,m](m>0)$ 上的最大值 $g(m)$.

【答案】（1） $a \leq 2$ （2） $g(m)=\begin{cases} 0, 0<m \leq 2 \\ m^2-2m, m>2 \end{cases}$

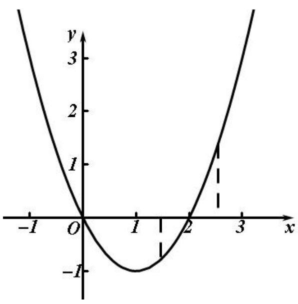
【解析】（1）利用二次函数的单调性即可求出 a 的取值范围；

（2）分 $0<m \leq 2$，$m>2$ 两种情况讨论函数 $f(x)$ 在区间 $[0,m](m>0)$ 上的最大值 $g(m)$.

解：（1）因为 $f(x)=x(x-2a)=(x-a)^2-a^2$，且 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上是增函数，

所以 $a \leq 2$；

（2）若 $a=1$，$f(x)=x(x-2)=(x-1)^2-1$



结合图象，可知：

当 $0<m\le 2$ 时，$f(x)_{\max}=f(0)=0$，即 $g(m)=0$，

当 $m>2$ 时，$f(x)_{\max}=f(m)=m^2-2m$，即 $g(m)=m^2-2m$，

$\therefore g(m)=\begin{cases}0,0<m\le 2\\ m^2-2m,m>2\end{cases}$.

【点睛】本题主要考查了二次函数的单调性，最值问题的求解，考查了分类讨论与数形结合的思想.

6．已知函数 $f(x)=-x^2+mx-m$

（1）若函数 $f(x)$ 在 $[-1,0]$ 上单调递减，求实数 m 的取值范围；

（2）是否存在实数 m，使得 $f(x)$ 在 $[2,3]$ 上的值域恰好是 $[2,3]$？若存在，求出实数 m 的值；若不存在，说明理由.

【答案】（1）$(-\infty,-2]$（2）存在；$m=6$

【解析】（1）根据单调性以及二次函数对称轴列不等式，解得结果；

（2）根据对称轴与定义区间位置关系讨论函数单调性，确定对应函数值域，根据条件列方程解得结果.

解：（1）函数 $f(x)$ 图象的对称轴时直线 $x=\frac{m}{2}$，

要使 $f(x)$ 在 $[-1,0]$ 上单调递减，应满足 $\frac{m}{2}\le -1$，解得 $m\le -2$，

故实数 m 的取值范围为 $(-\infty,-2]$

（2）①当 $\frac{m}{2}\le 2$，即 $m\le 4$ 时，$f(x)$ 在 $[2,3]$ 上单调递减，

若存在实数 m 使得 $f(x)$ 在 $[2,3]$ 上的值域是 $[2,3]$，

则 $\begin{cases}f(2)=3\\ f(3)=2\end{cases}$，即 $\begin{cases}-4+2m-m=3\\ -9+3m-m=2\end{cases}$，此时无解.

②当 $\frac{m}{2}\ge 3$，即 $m\ge 6$ 时，$f(x)$ 在 $[2,3]$ 上单调递增，

则 $\begin{cases}f(2)=2\\ f(3)=3\end{cases}$，即 $\begin{cases}-4+2m-m=2\\ -9+3m-m=3\end{cases}$，解得 $m=6$.

③当 $2<\frac{m}{2}<3$，即 $4<m<6$ 时，$f(x)$ 在 $[2,3]$ 上先递增，再递减

所以 $f(x)$ 在 $x=\frac{m}{2}$ 处取最大值，则 $f\left(\frac{m}{2}\right)=-m+\frac{m^2}{4}=3$，解得 $m=-2$ 或 6，不符合题意，舍去

综上可得，实数$m=6$使得$f\left(x\right)$在$\left[2,3\right]$上的值域恰好是$\left[2,3\right]$.