衔接点05 含绝对值函数的图象

【基础内容与方法】

1.绝对值在自变量上，则去掉函数 y 轴左边的图像，再把 y 轴右边的图像沿 y 轴翻折得到新的图像；

2.绝对值在函数解析式上，把 x 轴下方的图像沿 x 轴翻折得到新的图像；

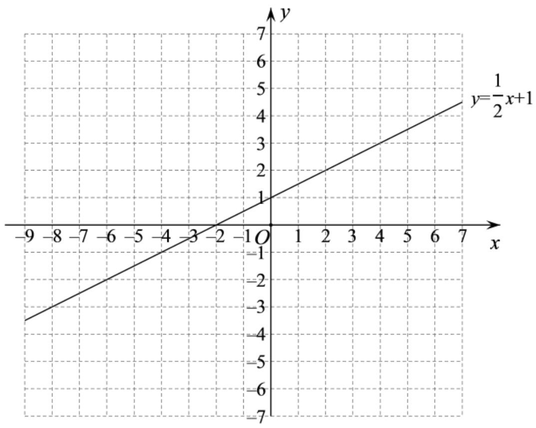
3.同时，函数图像也遵循平移的原则.

类型一：含绝对值的一次函数

1．已知函数 $y=k|x+2|+b$ 的图象经过点（-2，4）和（-6，-2），完成下面问题：

（1）求函数 $y=k|x+2|+b$ 的表达式；

（2）在给出的平面直角坐标系中，请用适当的方法画出这个函数的图象，并写出这个函数的一条性质；



（3）已知函数 $y=\frac{1}{2}x+1$ 的图象如图所示，结合你所画出 $y=k|x+2|+b$ 的图象，直接写出 $k|x+2|+b>\frac{1}{2}x+1$ 的解集.

【答案】（1）$y=-\frac{3}{2}|x+2|+4$；（2）当 $x<-2$ 时，y 随 x 增大而增大；当 $x>-2$ 时，y 随 x 增大而减少；（3）$-6<x<0$.

【解析】

（1）根据在函数 $y=k|x+2|+b$ 中，把点（-2，4）和（-6，-2）代入，可以求得该函数的表达式；

（2）根据（1）中的表达式可以画出该函数的图象，根据函数图像增减性几块得出结论；

（3）根据图象可以直接写出所求不等式的解集.

解：（1）根据题意，得 $\begin{cases} b=4 \\ k\cdot|-6+2|+b=-2 \end{cases}$

学而思1对1 课程咨询：400-810-2680

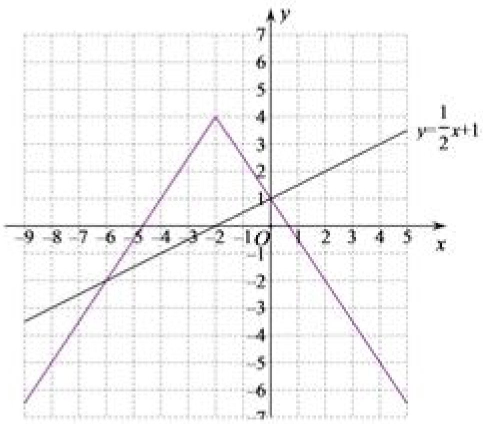
解方程组，得 $\begin{cases} k=-\dfrac{3}{2} \\ b=4 \end{cases}$

所求函数表达式为 $y=-\dfrac{3}{2}|x+2|+4$.

（2）列表如下：

x	-4	-2	0
$y=-\dfrac{3}{2}\|x+2\|+4$	1	4	1

描点并连线,函数的图象如图所示，



由图像可知，$y=-\dfrac{3}{2}|x+2|+4$ 性质为：当 $x<-2$ 时，y 随 x 增大而增大；当 $x>-2$ 时，y 随 x 增大而减少.

（3）由图象可知：$k|x+2|+b>\dfrac{1}{2}x+1$ 的解集是：$-6<x<0$.

【点睛】本题考查一次函数和反比例函数的交点、一元一次不等式与一次函数的关系，解答本题的关键是明确题意，利用一次函数的性质和数形结合的思想解答.

类型二：含绝对值的二次函数

（一）绝对值在自变量上

2．某班“数学兴趣小组”对函数 $y=-x^2+2|x|+1$ 的图象和性质进行了探究，探究过程如下，请补充完整.

（1）自变量 x 的取值范围是全体实数，x 与 y 的几组对应值列表如下：

x	…	- 3	$-\dfrac{5}{2}$	- 2	- 1	0	1	2	$\dfrac{5}{2}$	3	…

y	…	-2	$-\frac{1}{4}$	m	2	1	2	1	$-\frac{1}{4}$	-2	…

其中，m=_______.

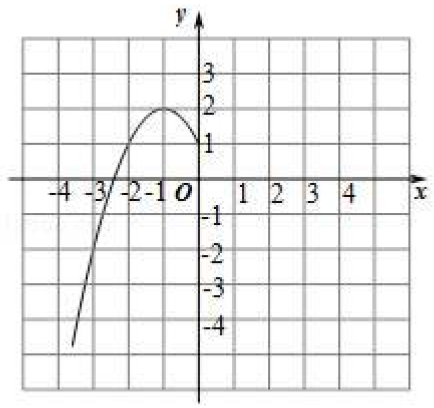
（2）根据上表数据，在如图所示的平面直角坐标系中描点，画出了函数图象的一部分，请画出该函数图象的另一部分.

（3）观察函数图象，写出两条函数的性质.

（4）进一步探究函数图象发现：

①方程 $-x^2+2|x|+1=0$ 有_______个实数根；

②关于 x 的方程 $-x^2+2|x|+1=a$ 有 4 个实数根时，a 的取值范围是_______.



【答案】（1）1；（2）详见解析；（3）①函数的最大值是 2，没有最小值；②当 $x>1$ 时，y 随 x 的增大而减小；（4）①2；②$1<a<2$.

【解析】（1）根据对称可得 m=1；

（2）画出图形；

（3）①写函数的最大值和最小值问题；

②确定一个范围写增减性问题；

（4）①当 y=0 时，与 x 轴的交点有两个，则有 2 个实数根；

②当 y=a 时，有 4 个实根，就是有 4 个交点，确定其 a 的值即可.

解：（1）由表格可知：图象的对称轴是 y 轴，∴$m=1$，

故答案为：1；

（2）如图所示；

（3）性质：①函数的最大值是 2，没有最小值；

②当 $x>1$ 时，y 随 x 的增大而减小；

（4）①由图象得：抛物线与 x 轴有两个交点

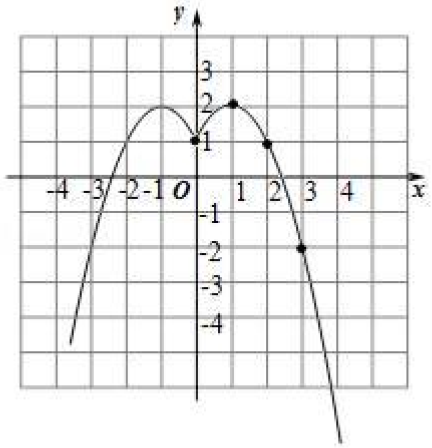
∴方程 $-x^2+2|x|+1=0$ 有 2 个实数根；

故答案为 2；

②由图象可知：$-x^2+2|x|+1=a$ 有 4 个实数根时，

即 $y=a$ 时，与图象有 4 个交点，所以 a 的取值范围是：$1<a<2$.

故答案为 $1<a<2$.



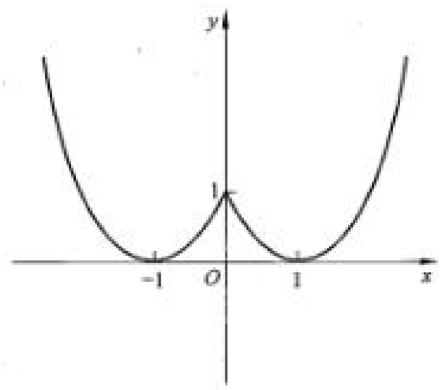
【点睛】本题考查了抛物线与 x 轴的交点，二次函数的性质，结合图像作答是解题的关键.

3．写出函数 $f(x)=|x|^2-2|x|+1$ 在什么范围内，y 随 x 的增大而增大，．y 随 x 的增大而减小？

【答案】$f(x)$ 的单调递增区间是 $(-1,0]$ 和 $(1,+\infty)$，单调递减区间是 $(-\infty,-1]$ 和 $(0,1]$

【解析】由题意转化条件为 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+1, x\ge 0\\ x^2+2x+1, x<0\end{cases}$，作出函数图象，数形结合即可得解.

由题意 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+1, x\ge 0\\ x^2+2x+1, x<0\end{cases}$，其图象如图所示：



由该函数的图象可得函数 $f(x)=x^2-2|x|+1$ 的单调递增区间是 $(-1,0]$ 和 $(1,+\infty)$，单调递减区间是

$(-\infty,-1]$ 和 $(0,1]$.

【点睛】本题考查了分段函数单调区间的确定，考查了二次函数图象与性质及数形结合思想的应用，属于基础题.

（二）绝对值在解析式上

4．探究函数 $y=\left|x^2-2x\right|$ 的图象与性质.

(1)下表是 y 与 x 的几组对应值.

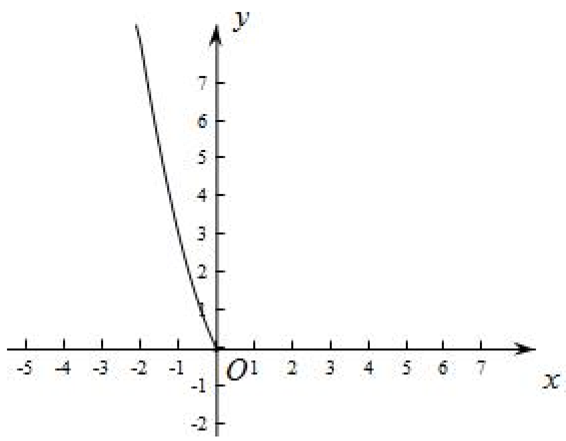
x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…	15	8	3	0	1	0	m	…

其中 m 的值为______________；

(2)根据上表数据，在如图所示的平面直角坐标系中描点，并已画出了函数图象的一部分，请你画出该图象的另一部分；

(3)结合函数的图象，写出该函数的一条性质：___________________________；

(4)若关于 x 的方程 $\left|x^2-2x\right|-t=0$ 有 2 个实数根，则 t 的取值范围是_________________.

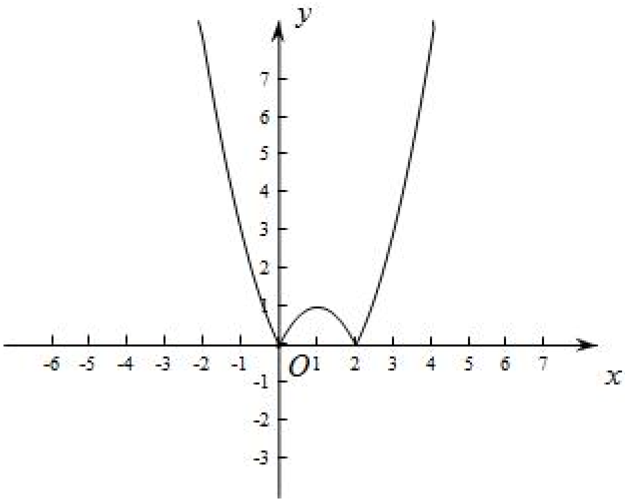


【答案】(1)3；(2)见解析；(3)图象关于直线 x=1 轴对称.（答案不唯一）；(4)t＞1 或 t=0.

【解析】（1）把 x=3 代入解析式计算即可得出 m 的值；（2）画出图象即可；（3）根据图象得出性质；（4）观察图象即可得出结论.

解：（1）当 x=3 时，y=$\left|3^2-2\times 3\right|$=3，∴$m$=3；

（2）如图所示：



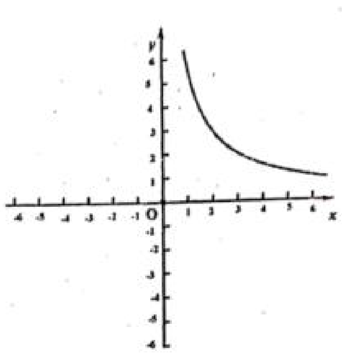
（3）图象关于直线 x=1 轴对称．（答案不唯一）

（4）观察图象可知：当 t>1 或 t=0 时，关于 x 的方程$\left|x^2-2x\right|-t=0$ 有 2 个实数根．

【点睛】本题考查了函数的图象及性质．解题的关键是画出图象．

类型三：含绝对值的反比例函数

5．某班数学兴趣小组对函数 $y=\dfrac{6}{|x|}$ 的图象和性质将进行了探究，探究过程如下，请补充完整．



（1）自变量 x 的取值范围是除 0 外的全体实数，x 与 y 的几组对应值列表如下：

x	…	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6	…
y	…	1	2	m	6	1	3	2	1	…

其中，$m=$__________．

（2）根据上表数据，在如图所示的平面直角坐标系中描点并画出了函数图象的一部分，请画出该函数图象的另一部分．

（3）观察函数图象，写出一条函数性质．

（4）进一步探究函数图象发现：

①函数图象与 x 轴交点情况是________，所以对应方程 $\frac{6}{|x|}=0$ 的实数根的情况是________.

②方程 $\frac{6}{|x|}=2$ 有_______个实效根；

③关于 x 的方程 $\frac{6}{|x|}=a$ 有 2 个实数根，a 的取值范围是________.

【答案】（1）3；（2）见解析；（3）在第一象限内，y 随着 x 的增大而减小；（4）①无交点，无实数根；②2；③ $a>0$.

【解析】（1）把 x=-2 代入 $y=\frac{6}{|x|}$ 求得 y 的值，即可得出 m 的值；

（2）根据表格提供的数据描点，连线即可得到函数 $y=\frac{6}{|x|}$ 的另一部分图象；

（3）观察图象，总结出函数的性质即可；

（4）①由于 x 的值不能为 0，故函数值也不能为 0，从而可得出函数图象与 x 轴无交点，因而 $\frac{6}{|x|}=0$ 无实数根；

②方程 $\frac{6}{|x|}=2$ 的实数根的个数可以看作函数 $y=\frac{6}{|x|}$ 与直线 y=2 的交点个数，画出图象即可得到结论；

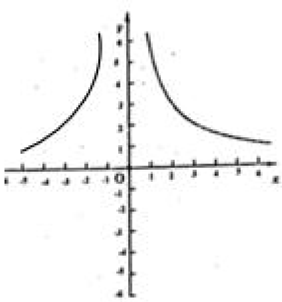
③由②的图象即可得到结果.

解：（1）把 m=-2 代入 $y=\frac{6}{|x|}$ 得，$y=\frac{6}{|-2|}=3$，

所以，m=3，

故答案为：3

（2）如图所示:



（3）观察图象可得，在第一象限内，y 随着 x 的增大而减小；（答案不唯一）

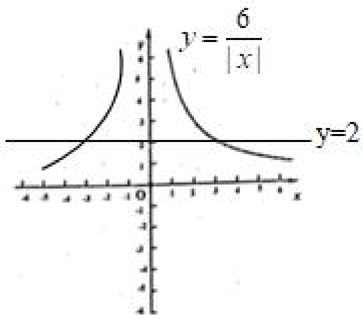
（4）①∵ $x\neq 0$，∴y≠0

∴函数图象与 x 轴无交点，

∴$\frac{6}{|x|}=0$无实数根；

故答案为：无交点；无实数根；

②求方程$\frac{6}{|x|}=2$的根的个数，可以看成函数$y=\frac{6}{|x|}$与直线 y=2 的交点个数，如图，



函数$y=\frac{6}{|x|}$与直线 y=2 有两个交点，故方程$\frac{6}{|x|}=2$有 2 个实数根，

故答案为：2；

③由②的图象可以得出，关于 x 的方程$\frac{6}{|x|}=a$有 2 个实数根，a 的取值范围是 $a>0$，

故答案为：$a>0$.

【点睛】本题考查的是反比例函数，主要考查函数图象上点的坐标特征，要求学生非常熟悉函数的性质及函数特征.

6．在学习函数时，我们经历了“确定函数的表达式利用函数图象研究其性质——运用函数解决问题“的学习过程，在画函数图象时，我们通过列表、描点、连线的方法画出了所学的函数图象．同时，我们也学习过绝对值的意义$|a|=\begin{cases} a(a\geq 0) \\ -a(a<0) \end{cases}$.

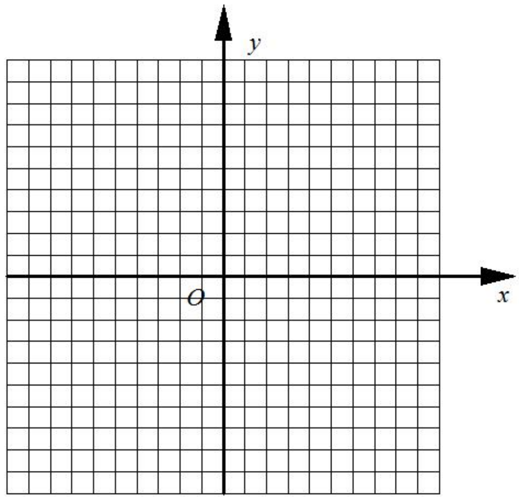
结合上面经历的学习过程，现在来解决下面的问题：

在函数 y=|kx-1|+b 中，当 x=0 时，y=-2；当 x=1 时，y=-3．

(1)求这个函数的表达式；

(2)在给出的平面直角坐标系中，请直接画出此函数的图象并写出这个函数的两条性质；

(3)在图中作出函数 y=$-\frac{3}{x}$的图象，结合你所画的函数图象，直接写出不等式|kx-1|+b≤$-\frac{3}{x}$的解集.



【答案】（1）y=|x-1|-3．（2）图象见解析．性质：图象关于直线 x=1 对称，在对称轴左侧，y 随 x 的增大而减小，在对称轴右侧，y 随 x 增大而增大，函数的最小值为-3．

；（3）1≤x≤3 或-3≤x<0．

【解析】（1）根据在函数 y＝|kx−1|＋b 中，当 x=0 时，y=-2；当 x=1 时，y=-3，可以求得该函数的表达式；

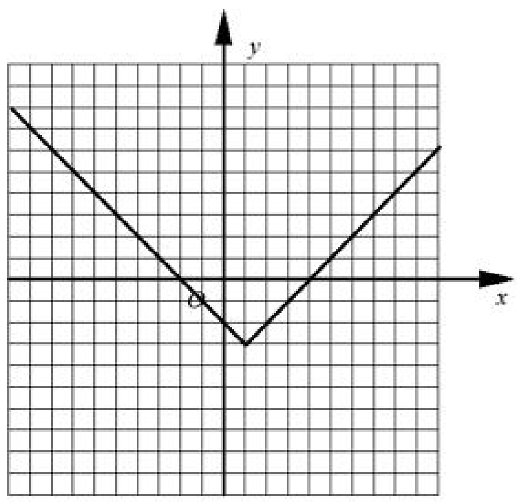
（2）由题意根据（1）中的表达式可以画出该函数的图象；

（3）由题意直接根据图象可以直接写出所求不等式的解集．

解：（1）在函数 y=|kx-1|+b 中，当 x=0 时，y=-2；当 x=1 时，y=-3

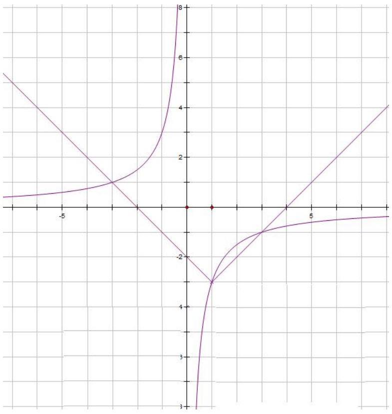
$\therefore \begin{cases} -2=1+b \\ -3=|k-1|+b \end{cases}$，解得：$\begin{cases} b=-3 \\ k=1 \end{cases}$，即函数解析式为：y=|x-1|-3．

（2）图象如下：



图象关于直线 x=1 对称，在对称轴左侧，y 随 x 的增大而减小，在对称轴右侧，y 随 x 增大而增大，函数的最小值为-3．

（3）图象如下，



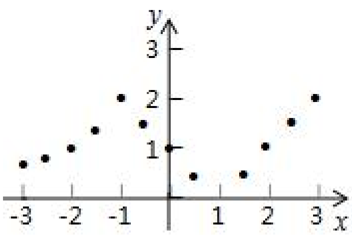
观察图像可得不等式|kx-1|+b≤$-\frac{3}{x}$的解集为：1≤x≤3 或-3≤x<0．

【点睛】本题考查一次函数和反比例函数的交点、一元一次不等式与一次函数的关系，解答本题的关键是明确题意，利用一次函数的性质和数形结合的思想解答．

7．若一个函数当自变量在不同范围内取值时，函数表达式不同，我们称这样的函数为分段函数．下面我们参照学习函数的过程与方法，探究分段函数 $y=\begin{cases}\frac{2}{x}(x\le -1)\\ |x-1|(x>1)\end{cases}$ 的图象与性质．列表：

x	…	-3	$-\frac{5}{2}$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	…
y	…	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{4}{3}$	2	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	…

描点：在平面直角坐标系中，以自变量 x 的取值为横坐标，以相应的函数值 y 为纵坐标，描出相应的点，如图所示．



（1）如图，在平面直角坐标系中，观察描出的这些点的分布，作出函数图象；

（2）研究函数并结合图象与表格，回答下列问题：

① 点 $A(-5,y_1)$，$B\left(-\frac{7}{2},y_2\right)$，$C\left(x_1,\frac{5}{2}\right)$，$D(x_2,6)$在函数图象上，$y_1$________$y_2$，$x_1$________$x_2$；（填"＞"，"＝"或"＜"）

② 当函数值 $y=2$ 时，求自变量 x 的值；

③ 在直线 $x=-1$ 的右侧的函数图象上有两个不同的点 $P(x_3,y_3)$，$Q(x_4,y_4)$，且 $y_3=y_4$，求 x_3+x_4 的值；

④ 若直线 $y=a$ 与函数图象有三个不同的交点，求 a 的取值范围.

【答案】（1）见解析；（2）①＜，＜；② $x=3$ 或 $x=-1$；③ $x_3+x_4=2$；④ $0<a<2$.

【解析】

【分析】

(1)描点连线即可；

(2)①观察函数图象，结合已知条件即可求得答案；

②把 y=2 代入 y=|x-1|进行求解即可；

③由图可知 -1„ x„ 3 时，点关于 x=1 对称，利用轴对称的性质进行求解即可；

④观察图象即可得答案.

【详解】

(1)如图所示：

(2)① $A(-5,y_1)$，$B\left(-\frac{7}{2},y_2\right)$，

A 与 B 在 $y=-\frac{1}{x}$ 上，y 随 x 的增大而增大，$\therefore y_1<y_2$；

$C\left(x_1,\frac{5}{2}\right)$，$D(x_2,6)$，

C 与 D 在 $y=|x-1|$ 上，观察图象可得 $x_1<x_2$，

故答案为＜，＜；

②当 $y=2$ 时，$2=-\frac{1}{x}$，$\therefore x=-\frac{1}{2}$(不符合)，

当 $y=2$ 时，$2=|x-1|$，$\therefore x=3$ 或 $x=-1$；

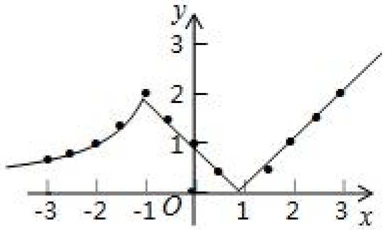
③$\because P(x_3,y_3)$，$Q(x_4,y_4)$ 在 $x=-1$ 的右侧，

$\therefore -1 \leqslant x \leqslant 3$ 时，点关于 x=1 对称，

$\because y_3 = y_4$，

$\therefore x_3 + x_4 = 2$；

④由图象可知，0<a<2.



【点睛】本题考查反比例函数的图象及性质，一次函数的图象及性质；能够通过描点准确的画出函数图象是解题的关键.