衔接点 04 高次方程，根式方程和分式方程的解

【基础内容与方法】

高次方程主要指未知数指数大于等于 2 的方程，其解法主要是换元法和因式分解法，同时这里也会巩固韦达定理，进一步理解根与系数之间的关系．

类型一：解根式方程

例 1：求方程 $x-2\sqrt{x}-1=0$ 的解集.

【答案】$\{3+2\sqrt{2}\}$

【解析】设 $\sqrt{x}=y$，则 $y..0$，

故原方程可变为 $y^2-2y-1=0$，

因此可知 $y=1+\sqrt{2}$ 或 $y=1-\sqrt{2}$（舍）.

从而 $\sqrt{x}=1+\sqrt{2}$，即 $x=3+2\sqrt{2}$，

所以原方程的解集为 $\{3+2\sqrt{2}\}$.

【点睛】本题考查通过开根号法求解一元二次方程，一般遵循配方，开根号的步骤，属基础题.

考点练习一

1.解方程 $x^2+x+\sqrt{x^2+x+7}=5$·

【答案】$\{-2,1\}$

【解析】令 $\sqrt{x^2+x+7}=t(t>0)$ 方程化为 $t^2+t-12=0$，

解得 $t=3$ 或 $t=-4$（舍）.

由 $t=3$ 得 $\sqrt{x^2+x+7}=3$，即 $x^2+x-2=0$，

解得 $x=-2$ 或 $x=1$，

经检验，$x=-2,x=1$ 是原方程的解.

所以原方程的解集为 $\{-2,1\}$.

【点睛】本题考查利用换元法求解带根式的方程，属中档题.

类型二：解高次方程

例 2：$\left(x^2-x\right)^2-4\left(x^2-x\right)-12=0$.

【答案】（$\{-2,3\}$；

【解析】令 $x^2-x=t$，原方程化为 $t^2-4t-12=0$，

解得 $t=-2$ 或 $t=6$．

当 $t=-2$ 时，$x^2-x=-2$，

即 $x^2-x+2=0$，$\Delta=(-1)^2-4\times 2=-7<0$，此方程无解．

当 $t=6$ 时，$x^2-x=6$，即 $x^2-x-6=0$，解得 $x=-2$ 或 $x=3$．

所以原方程的解集为 $\{-2,3\}$．

【点睛】本题考查利用换元法求解高次方程，属中档题．

考点练习二

2．求下列方程的解集

（1）$x^4-5x^2+4=0$；

（2）$\left(x^2-2x\right)^2+\left(x^2-2x\right)-6=0$；

（3）$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120$．

【答案】（1）$\{-1,-2,1,2\}$；（2）$\{1-\sqrt{3},1+\sqrt{3}\}$；（3）$\{-6,1\}$

【解析】（1）设 $x^2=y$，原方程化为 $y^2-5y+4=0$，

解得 $y_1=1,y_2=4$．

当 $y=1$ 时，$x^2=1$，$\therefore x=\pm 1$；

当 $y=4$ 时，$x^2=4$，$\therefore x=\pm 2$．

$\therefore$原方程的解集为 $\{-1,-2,1,2\}$．

（2）设 $x^2-2x=y$，原方程化为 $y^2+y-6=0$，

解得 $y_1=-3,y_2=2$．

当 $y=-3$ 时，有 $x^2-2x+3=0$，

此时，$\Delta=(-2)^2-4\times 1\times 3=-8<0$，方程的解集为 ϕ；

当 $y=2$ 时，有 $x^2-2x-2=0$，

解得 $x_1=1-\sqrt{3},x_2=1+\sqrt{3}$.

∴方程的解集为 $\{1-\sqrt{3},1+\sqrt{3}\}$.

（3）原方程化为 $\left(x^2+5x+4\right)\left(x^2+5x+6\right)=120$，

设 $x^2+5x+4=y$，则有 $y(y+2)=120$，

解得 $y_1=-12,y_2=10$.

当 $y=-12$ 时，有 $x^2+5x+4=-12$，

即 $x^2+5x+16=0$，此时 $\Delta=25-4\times16<0$，方程的解集为 ϕ.

当 $y=10$ 时，有 $x^2+5x+4=10$，即 $x^2+5x-6=0$，

解得 $x_1=-6,x_2=1$.

∴原方程的解集为 $\{-6,1\}$.

【点睛】本题考查利用换元法求高次方程，注意恰当的换元可简化计算，属中档题.

类型三：解分式方程

例 3：$x^2-x-\dfrac{2}{x^2-x}=1$.

【答案】$\{-1,2\}$；

【解析】令 $x^2-x=t$，原方程化为 $t-\dfrac{2}{t}=1$，

即 $t^2-t-2=0$，解得 $t=-1$ 或 $t=2$.

当 $t=-1$ 时，即 $x^2-x+1=0$，$\Delta=(-1)^2-4\times1=-3<0$，此方程无解.

当 $t=2$ 时，即 $x^2-x-2=0$，解得 $x=-1$ 或 $x=2$，

经检验，$x=-1,x=2$ 是原方程的解.

所以原方程的解集为 $\{-1,2\}$.

【点睛】本题考查利用换元法求解高次方程，分式方程，带根式的方程，属中档题.

考点练习三

3．求下列方程的解集：

（1）$\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x}-1=0$；

（2）$\dfrac{(x-1)^2}{x^2}-\dfrac{x-1}{x}-2=0$；

（3）$\dfrac{x^2+2}{2x^2-1}-\dfrac{3\left(2x^2-1\right)}{x^2+2}=-2$．

【答案】（1）$\{-1,2\}$（2）$\left\{-1,\dfrac{1}{2}\right\}$；（3）$\left\{-\dfrac{\sqrt{7}}{7},\dfrac{\sqrt{7}}{7},-\sqrt{3},\sqrt{3}\right\}$．

【解析】（1）令 $t=\dfrac{1}{x}$，则原方程化为 $2t^2+t-1=0$，

即 $(2t-1)(t+1)=0$，解得 $t=\dfrac{1}{2}$ 或 $t=-1$．

当 $t=\dfrac{1}{2}$，即 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}$ 时，解得 $x=2$；

当 $t=-1$，即 $\dfrac{1}{x}=-1$ 时，解得 $x=-1$．

所以原方程的解集为 $\{-1,2\}$．

（2）令 $\dfrac{x-1}{x}=t$，则原方程可化为 $t^2-t-2=0$，

解得 $t_1=2,t_2=-1$．

当 $t=2$ 时，$\dfrac{x-1}{x}=2$，解得 $x_1=-1$；

当 $t=-1$ 时，$\dfrac{x-1}{x}=-1$，解得 $x_2=\dfrac{1}{2}$．

经检验，原方程的解集为 $\left\{-1,\dfrac{1}{2}\right\}$．

（3）令 $\dfrac{x^2+2}{2x^2-1}=t$，原方程可化为 $t-\dfrac{3}{t}=-2$，

即 $t^2+2t-3=0$，解得 $t_1=-3,t_2=1$．

经检验，方程 $t-\dfrac{3}{t}=-2$ 的解集为 $\{-3,1\}$．

所以 $\dfrac{x^2+2}{2x^2-1}=-3$ 或 $\dfrac{x^2+2}{2x^2-1}=1$，

即 $7x^2-1=0$ 或 $x^2-3=0$，

解得 $x_1=-\frac{\sqrt{7}}{7}$， $x_2=\frac{\sqrt{7}}{7}$， $x_3=-\sqrt{3}$， $x_4=\sqrt{3}$，

经检验，原方程的解集为 $\left\{-\frac{\sqrt{7}}{7},\frac{\sqrt{7}}{7},-\sqrt{3},\sqrt{3}\right\}$.

【点睛】本题考查换元法求解分式方程，注意对根的检验.

类型四：韦达定理的应用

例 4：已知方程 $x^2-2\sqrt{2}x+1=0$ 的两根为 x_1 与 x_2，求下列各式的值：

（1） $x_1^2x_2+x_1x_2^2$；（2） $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$.

【答案】（1） $2\sqrt{2}$；（2） $2\sqrt{2}$

【解析】由方程 $x^2-2\sqrt{2}x+1=0$ 得 $x_1+x_2=2\sqrt{2},x_1x_2=1$.

（1） $x_1^2x_2+x_1x_2^2=x_1x_2\left(x_1+x_2\right)=2\sqrt{2}$；

（2） $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{2\sqrt{2}}{1}=2\sqrt{2}$.

【点睛】本题考查由韦达定理，求解 x_1,x_2 的代数式的值，属基础题.

考点练习三

4．已知关于 x 的方程 $mx^2-(m-1)x-1=0$.

（1）求证：对于任意实数 m 方程总有实数根；

（2）若 x_1,x_2 是原方程的两根，且 $\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}=2x_1x_2+1$，求 m 的值.

【答案】（1）证明见详解；（2） $m=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $m=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

【解析】（1）证明：当 $m=0$ 时，方程化为 $x-1=0$，即 $x=1$，方程有一个实根；

当 $m\neq 0$ 时， $\Delta=[-(m-1)]^2-4m\times(-1)=(m+1)^2..0$，方程有两个实根.

综上，对于任意实数 m 方程总有实数根.

（2）∵ x_1,x_2 是方程 $mx^2-(m-1)x-1=0$ 的两根，

∴ $x_1+x_2=\frac{m-1}{m},x_1x_2=-\frac{1}{m}$.

又∵ $\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}=2x_1x_2+1$,

∴ $\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}=2x_1x_2+1$,

∴ $\frac{\left(\frac{m-1}{m}\right)^2-2\times\left(-\frac{1}{m}\right)}{-\frac{1}{m}}=2\times\left(-\frac{1}{m}\right)+1$,

整理，得 $m^2+m-1=0$ ，解得 $m=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $m=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

【点睛】本题考查二次方程根的情况与参数之间的关系，以及韦达定理的应用，属基础题.