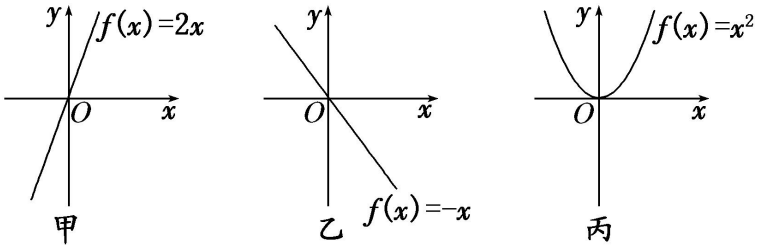
衔接点 11 从 k 值和抛物线对称轴到函数的单调性

【基础内容与方法】

1．提出问题：从图象上看，自变量 x 增大时，函数 $f(x)$的值如何变化？



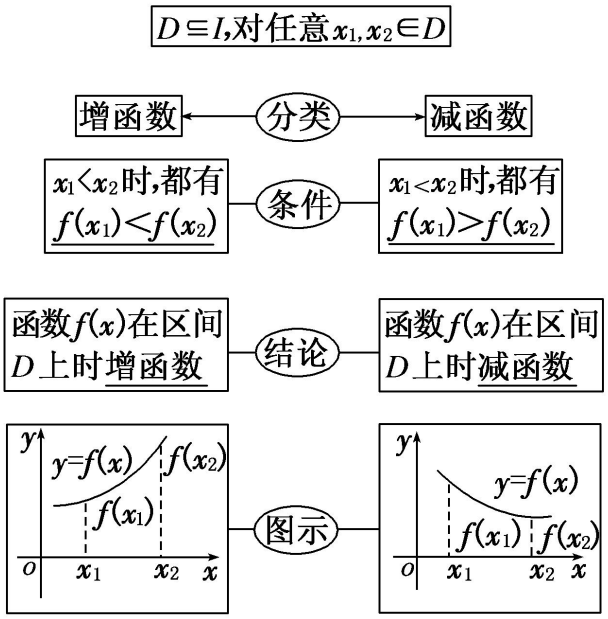
答案：甲图中，函数 $f(x)$的值随 x 增大而增大；

乙图中，函数 $f(x)$的值随 x 增大而减小；

丙图中，在 y 轴左侧函数 $f(x)$的值随 x 的增大而减小；在 y 轴右侧，函数 $f(x)$的值随 x 的增大而增大．

2．知识引入

（1）定义域为 I 的函数 $f(x)$的增减性

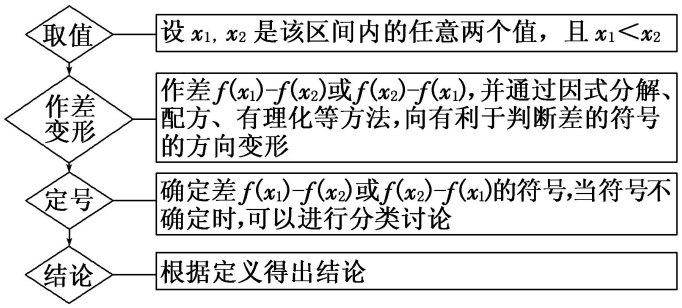


（2）单调性与单调区间

如果函数 $y=f(x)$在区间 D 上是增函数或减函数，那么就说函数 $y=f(x)$在这一区间上具有(严格的)单调性，区间 D 叫做 $y=f(x)$的单调区间．

2．知识点睛

利用定义证明函数单调性的步骤



指出：理解函数的单调性在引入 x_1，x_2 要注意的问题.

(1)任意性，即 x_1，x_2 是在某一区间上的任意两个值，不能以特殊值代换；

(2)有大小，即确定的两个值 x_1，x_2 必须区分大小，一般令 $x_1<x_2$；

(3)同属一个单调区间.

类型一：函数单调性的证明

例 1：利用单调性的定义，证明函数 $y=\dfrac{x+2}{x+1}$ 在 $(-1，+\infty)$ 上是减函数.

类型二：利用函数的单调性来求取参数的范围

例 2：已知 $y=f(x)$ 在定义域 $(-1,1)$ 上是减函数，且 $f(1-a)<f(2a-1)$，则 a 的取值范围是_____.

考点练习一

1．设 $f(x)=(2a-1)x+b$ 在 R 上是减函数，则有(　　)

A．$a\geq\dfrac{1}{2}$　　B．$a\leq\dfrac{1}{2}$　　C．$a>-\dfrac{1}{2}$　　D．$a<\dfrac{1}{2}$

2．函数 $y=\sqrt{x+1}$ 的单调递增区间为_____.

3．已知 $f(x)$ 是定义在区间 $[-1,1]$ 上的增函数，且 $f(x-2)<f(1-x)$，则 x 的取值范围为_____.

4．已知函数 $f(x)=x^2-2(1-a)x+2$ 在 $(-\infty，4]$ 上是减函数，则实数 a 的取值范围为_____.

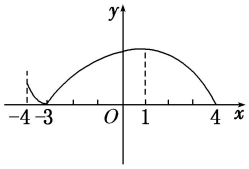
5．求证：函数 $y=\dfrac{1}{x-1}$ 在区间 $(1，+\infty)$ 上为单调减函数.

6.画出函数 $y=-x^2+2|x|+1$ 的图象并写出函数的单调区间.

7.设函数 $f(x)$ 在 R 上是偶函数，在区间 $(-\infty，0)$ 上递增，且 $f(2a^2+a+1)<f(2a^2-2a+3)$，求 a 的取值范围.

考点练习二

8．函数 $y=f(x)$的图象如图所示，其增区间是(　　)



A．$[-4,4]$　　B．$[-4,-3]\cup[1,4]$　　C．$[-3,1]$　　D．$[-3,4]$

9．若 $f(x)=-x^2+2ax$ 与 $g(x)=\frac{a}{x}$在区间$[1,2]$上都是减函数，则 a 的取值范围是(　　)

A．$(-1,0)\cup(0,1)$　　B．$(-1,0)\cap(0,1)$

C．$(0,1)$　　D．$(0,1]$

10．若 $f(x)$在 R 上是减函数，则 $f(-1)$_____$f(a^2+1)$(填“>”或“<”或“≥”或“≤”).

11．求下列函数的单调区间.

(1)$f(x)=3|x|$；　　(2)$f(x)=|x^2+2x-3|$.

12．如果二次函数 $f(x)=x^2-(a-1)x+5$ 在区间$(\frac{1}{2},1)$上是增函数，则实数 a 的取值范围为_____.

13．函数 $f(x)$是定义域上的单调递减函数，且过点$(-3,2)$和$(1,-2)$，则使$|f(x)|<2$ 的自变量 x 的取值范围是_____.

14．已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x+3-3a, & x<0\\ -x^2+a, & x\geq 0\end{cases}$ 满足对任意的 x_1，$x_2\in R$，$(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]<0$，求 a 的取值范围.

15．讨论函数 $f(x)=\frac{ax}{x^2-1}(-1<x<1,\ a\neq 0)$的单调性.

16．已知 $y=f(x)$是定义在（$-\infty$，$+\infty$）上的奇函数，且在［0，$+\infty$）上为增函数，

（1）求证：函数在（$-\infty$，0）上也是增函数；

（2）如果$f(\frac{1}{2})=1$，解不等式$-1<f(2x+1)\leq 0$.