衔接点 08 从换元法，整体思想到函数的解析式

【基础内容与方法】

题目常见形式“已知 $f\left[g(x)\right]$ 的解析式，求 $f(x)$ 的解析式．”

1.“整体代入法”是把 $g(x)$ 视为一个整体，将 $f\left[g(x)\right]$ 的解析式转化为含 $g(x)$ 的表达式，然后直接整体代换 $g(x)$，即可求出解析式，此种方法不必求出 x，可以减少运算量．

2.“换元法”是通过引入参数 t 进行式子的变形，从而得到 $f(x)$ 的表达式，这是解此类型题的通法．

类型一：已知 $f(x)$ 的解析式，求 $f[g(x)]$ 的解析式

例 1：已知 $f(x)=2x^2+1$，求 $f(\sqrt{x}+1)$ 的解析式．

类型二：已知 $f[g(x)]$ 的解析式，求 $f(x)$ 的解析式

方法：通过引入参数 t，进行换元，分离相应的变量 x,从而得到 $f(x)$ 的解析式．

例 2：已知函数 $f(\frac{1+x}{x})=\frac{1+x^2}{x^2}+\frac{1}{x}$，求 $f(x)$ ．

考点练习

1．设 $f(x)=2x+3$，$g(x)=f(x-2)$，则 $g(x)$ 等于(　　)

A．$2x+1$　　B．$2x-1$　　C．$2x-3$　　D．$2x+7$

2．已知 $f(x)$ 是一次函数，且满足 $3f(x+1)=6x+4$，则 $f(x)=$________．

3．设 $f(x)=\frac{1}{1-x}$，则 $f[f(x)]=$________．

4．已知函数 $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$．

(1)求 $f(2)+f(\frac{1}{2})$，$f(3)+f(\frac{1}{3})$ 的值；

(2)求证：$f(x)+f(\frac{1}{x})$是定值；

(3)求$f(2)+f(\frac{1}{2})+f(3)+f(\frac{1}{3})+\ldots+f(2\ 012)+f(\frac{1}{2\ 012})$的值．

5．已知$f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$，求$f(x)$．

6．（1）已知$af(x)+f(-x)=bx$，其中$a\neq\pm1$，求$f(x)$；

（2）已知$f(x)-2f(\frac{1}{x})=3x+2$，求$f(x)$．

7．(1)已知函数$f(x)$是一次函数，若$f[f(x)]=4x+8$，求$f(x)$的解析式；

(2)已知$f(x)$是二次函数，且满足$f(0)=1$，$f(x+1)-f(x)=2x$，求$f(x)$的解析式．

8．对 $x \neq \pm 1$ 的所有实数 x，函数 $f\left(x\right)$ 满足 $f\left(\frac{x}{1+x}\right)-2f\left(\frac{1}{1+x}\right)=\frac{x+2}{x-1}$，求 $f\left(x\right)$ 的解析式.