衔接点 08 从换元法，整体思想到函数的解析式

【基础内容与方法】

题目常见形式“已知 $f[g(x)]$ 的解析式，求 $f(x)$ 的解析式．”

1.“整体代入法”是把 $g(x)$ 视为一个整体，将 $f[g(x)]$ 的解析式转化为含 $g(x)$ 的表达式，然后直接整体代换 $g(x)$，即可求出解析式，此种方法不必求出 x，可以减少运算量．

2.“换元法”是通过引入参数 t 进行式子的变形，从而得到 $f(x)$ 的表达式，这是解此类型题的通法．

类型一：已知 $f(x)$的解析式，求 $f[g(x)]$的解析式

例 1：已知 $f(x)=2x^2+1$，求 $f(\sqrt{x}+1)$的解析式．

方法：解决此类问题的方法为“直接代入法”，直接代入法主要解决已知 $f(x)$的解析式，求 $f[g(x)]$的解析式的问题，其解法为用 $g(x)$替换 $f(x)$解析式中的所有自变量 x.

解析：因为 $f(x)=2x^2+1$，

所以 $f(\sqrt{x}+1)=2(\sqrt{x}+1)^2+1=2x+4\sqrt{x}+3$.

类型二：已知 $f[g(x)]$ 的解析式，求 $f(x)$的解析式

方法：通过引入参数 t，进行换元，分离相应的变量 x,从而得到 $f(x)$的解析式．

例 2：已知函数 $f(\frac{1+x}{x})=\frac{1+x^2}{x^2}+\frac{1}{x}$，求 $f(x)$ ．

解析：令 $t=\frac{1+x}{x}=\frac{1}{x}+1$，得 $x=\frac{1}{t-1}$，

则 $t\neq1$.把 $x=\frac{1}{t-1}$代入 $f(\frac{1+x}{x})=\frac{1+x^2}{x^2}+\frac{1}{x}$，得

$f(t)=\frac{1+\quad \backslash f(1}{t-1}\ ^2,\quad \backslash f(1,t-1)\quad ^2)+\frac{1}{\frac{1}{t-1}}=(t-1)^2+1+(t-1)=t^2-t+1$.

∴所求函数的解析式为 $f(x)=x^2-x+1$，$x\in(-\infty,\ 1)\cup(1,\ +\infty)$.

考点练习

1．设 $f(x)=2x+3$，$g(x)=f(x-2)$，则 $g(x)$等于(　　)

A．$2x+1$　　B．$2x-1$　C．$2x-3$　D．$2x+7$

解析：选 B，∵$f(x)=2x+3$，∴$f(x-2)=2(x-2)+3=2x-1$，即 $g(x)=2x-1$，故选 B.

2．已知 $f(x)$是一次函数，且满足 $3f(x+1)=6x+4$，则 $f(x)=$________.

解析：设 $f(x)=kx+b(k\neq0)$，则 $3f(x+1)=3[k(x+1)+b]=3kx+3k+3b=6x+4$，所以$\begin{cases}3k=6,\\3k+3b=4,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=2,\\b=-\dfrac{2}{3},\end{cases}$所以 $f(x)=2x-\dfrac{2}{3}$. 答案：$2x-\dfrac{2}{3}$.

3．设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，则 $f[f(x)]=$________.

解析：$f[f(x)]=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=\dfrac{1}{\dfrac{1-x-1}{1-x}}=\dfrac{x-1}{x}$.答案：$\dfrac{x-1}{x}(x\neq0$，且 $x\neq1)$.

4．已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$.

(1)求 $f(2)+f(\dfrac{1}{2})$，$f(3)+f(\dfrac{1}{3})$的值；

(2)求证：$f(x)+f(\dfrac{1}{x})$是定值；

(3)求 $f(2)+f(\dfrac{1}{2})+f(3)+f(\dfrac{1}{3})+\ldots+f(2\,012)+f(\dfrac{1}{2\,012})$的值.

解析：(1)∵$f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$，

∴$f(2)+f(\dfrac{1}{2})=\dfrac{2^2}{1+2^2}+\dfrac{\backslash f(1}{2}\ {}^2{,}1+\ \backslash f(1,2)\ {}^2)=1$，

$f(3)+f(\dfrac{1}{3})=\dfrac{3^2}{1+3^2}+\dfrac{\backslash f(1}{3}\ {}^2{,}1+\ \backslash f(1,3)\ {}^2)=1$.

(2)证明：$f(x)+f(\dfrac{1}{x})=\dfrac{x^2}{1+x^2}+\dfrac{\backslash f(1}{x}\ {}^2{,}1+\ \backslash f(1,x)\ {}^2)=\dfrac{x^2}{1+x^2}+\dfrac{1}{x^2+1}=\dfrac{x^2+1}{x^2+1}=1$.

(3)由(2)知 $f(x)+f(\dfrac{1}{x})=1$，

∴$f(2)+f(\dfrac{1}{2})=1$，$f(3)+f(\dfrac{1}{3})=1$，$f(4)+f(\dfrac{1}{4})=1$，…，$f(2\,012)+f(\dfrac{1}{2\,012})=1$.

∴$f(2)+f(\dfrac{1}{2})+f(3)+f(\dfrac{1}{3})+\ldots+f(2\,012)+f(\dfrac{1}{2\,012})=2\,011$.

法二：(配凑法)

∵$f(\dfrac{1+x}{x})=\dfrac{1+x^2+2x-2x}{x^2}+\dfrac{1}{x}$

$=(\frac{1+x}{x})^2-\frac{1+x-x}{x}$

$=(\frac{1+x}{x})^2-\frac{1+x}{x}+1$，

$\therefore f(x)=x^2-x+1$.

又$\because \frac{1+x}{x}=\frac{1}{x}+1\neq 1$，

$\therefore$所求函数的解析式为 $f(x)=x^2-x+1(x\neq 1)$.

5．已知 $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$，求 $f(x)$.

解析：②法一：(换元法)

令$\sqrt{x}+1=t(t\geq 1)$，则 $x=(t-1)^2$，

$\therefore f(t)=(t-1)^2+2\sqrt{(t-1)^2}=t^2-1$.

$\therefore f(x)=x^2-1(x\geq 1)$.

法二：(配凑法)

$\because x+2\sqrt{x}=(\sqrt{x}+1)^2-1$，

$\therefore f(\sqrt{x}+1)=(\sqrt{x}+1)^2-1$.

又$\because \sqrt{x}+1\geq 1$，$\therefore f(x)=x^2-1(x\geq 1)$.

6．(1)已知 $af(x)+f(-x)=bx$，其中 $a\neq\pm 1$，求 $f(x)$；

(2)已知 $f(x)-2f(\frac{1}{x})=3x+2$，求 $f(x)$.

解析：①在原式中以 $-x$ 替换 x，得 $af(-x)+f(x)=-bx$，

于是得$\begin{cases} af(x)+f(-x)=bx \\ af(-x)+f(x)=-bx \end{cases}$

消去 $f(-x)$，得 $f(x)=\frac{bx}{a-1}$.

故 $f(x)$的解析式为 $f(x)=\frac{b}{a-1}x$.

②在原式中用$\frac{1}{x}$替换 x，得 $f(\frac{1}{x})-2f(x)=\frac{3}{x}+2$，

于是有$\begin{cases} f(\frac{1}{x})-2f(x)=\frac{3}{x}+2 \\ f(x)-2f(\frac{1}{x})=3x+2 \end{cases}$

消去 $f(\frac{1}{x})$，得 $f(x)=-x-\frac{2}{x}-2$.

7．(1)已知函数 $f(x)$是一次函数，若 $f[f(x)]=4x+8$，求 $f(x)$的解析式；

(2)已知 $f(x)$是二次函数，且满足 $f(0)=1$，$f(x+1)-f(x)=2x$，求 $f(x)$的解析式．

解析：(1)设 $f(x)=ax+b(a\neq 0)$，

则 $f[f(x)]=f(ax+b)=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b$．

又 $f[f(x)]=4x+8$，

$\therefore a^2x+ab+b=4x+8$，

即 $\begin{cases}a^2=4,\\ ab+b=8\end{cases}$，解之得 $\begin{cases}a=2,\\ b=\frac{8}{3},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-2,\\ b=-8.\end{cases}$

$\therefore f(x)=2x+\frac{8}{3}$或 $f(x)=-2x-8$．

(2)设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，

$\because f(0)=1$，$\therefore c=1$．

又$\because f(x+1)-f(x)=2x$，

$\therefore a(x+1)^2+b(x+1)+1-(ax^2+bx+1)=2x$.

整理得：$2ax+(a+b)=2x$．

由恒等式性质知上式中对应项系数相等．

$\therefore \begin{cases}2a=2,\\ a+b=0,\end{cases}$ 解得 $a=1$，$b=-1$，$\therefore f(x)=x^2-x+1$．

8．对 $x\neq\pm 1$ 的所有实数 x，函数 $f(x)$ 满足 $f\left(\frac{x}{1+x}\right)-2f\left(\frac{1}{1+x}\right)=\frac{x+2}{x-1}$，求 $f(x)$ 的解析式．

解析：由已知 $f\left(\frac{x}{1+x}\right)-2f\left(\frac{1}{1+x}\right)=\frac{x+2}{x-1}$ ①

中用 $\frac{1}{x}$ 代换 x 得到 $f\left(\frac{1}{1+x}\right)-2f\left(\frac{x}{1+x}\right)=\frac{1+2x}{1-x}$ ②

由①×2＋②得到 $f\left(\frac{1}{1+x}\right)=\frac{1}{1-x}$ ③

设 $t=\frac{1}{1+x}$，则 $x=\frac{1}{t}-1$，则代入③得到 $f(t)=\frac{t}{2t-1}$，所以 $f(x)=\frac{x}{2x-1}$．