



衔接点 07 从分式，根式的意义到函数的定义域

【基础内容与方法】

1. 分式的意义和根式的意义在专题三已有详述.

2. 函数的概念：设 A, B 是非空数集，如果按照某种对应关系 f ，使对于集合 A 中任意一个数 x ，在集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$ 和它对应，那么就称 $f: A \rightarrow B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数，记法为： $y=f(x)$ ， $x \in A$ 。

3. 定义域： x 叫做自变量， x 的取值范围 A 叫做函数的定义域。

这里要指出，函数定义中强调“三性”——任意性、存在性、唯一性，即对于非空数集 A 中的任意一个(任意性)元素 x ，在非空数集 B 中都有(存在性)唯一(唯一性)的元素 y 与之对应。这三性只要有一个不满足，便不能构成函数。

4. 方法指引

(1) 要明确使各函数表达式有意义的条件是什么，函数有意义的准则一般有：

① 分式的分母不为 0；② 偶次根式的被开方数非负；③ $y=x^0$ 要求 $x \neq 0$ ；

(2) 不对解析式化简变形，以免定义域变化；

(3) 当一个函数由两个或两个以上代数式的和、差、积、商的形式构成时，定义域是使得各式子都有意义的公共部分的集合；

(4) 定义域是一个集合，要用集合或区间表示，若用区间表示数集，不能用“或”连接，而应该用并集符号“ $\cup$ ”连接。

类型一：依据函数形式结构来进行定义域的求取

方法：利用函数的形式结构，从分式，根式的意义来找限定条件。

例 1：求下列函数的定义域：

$$(1) y = \frac{1}{x+1} - \sqrt{1-x}; \quad (2) y = \frac{\sqrt{5-x}}{|x|-3}$$

解析：(1) 要使函数有意义，自变量 x 的取值必须满足 $\begin{cases} x+1 \neq 0, \\ 1-x \geq 0. \end{cases}$

解得 $x \leq 1$ 且 $x \neq -1$,

即函数定义域为 $\{x | x \leq 1, \text{ 且 } x \neq -1\}$ 。

(2) 要使函数有意义，自变量 x 的取值必须满足 $\begin{cases} 5-x \geq 0, \\ |x|-3 \neq 0, \end{cases}$

解得 $x \leq 5$ 且 $x \neq \pm 3$,

即函数定义域为 $\{x | x \leq 5, \text{ 且 } x \neq \pm 3\}$ 。



类型二：已知 $f(x)$ 的定义域，求 $f[\varphi(x)]$ 的定义域

方法：指出：若已知 $f(x)$ 的定义域 $x \in (a, b)$ ，求 $f[\varphi(x)]$ 的定义域，其方法是：由 $a < \varphi(x) < b$ 求得 x 的范围，即为 $f[\varphi(x)]$ 的定义域。

例 2：已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[1, 4]$ ，求 $f(\frac{1}{x} + 2)$ 的定义域。

解析：由 $1 \leq \frac{1}{x} + 2 \leq 4$ ，得 $-1 \leq \frac{1}{x} \leq 2$ ，即 $-1 \leq \frac{1}{x} < 0$ 或 $0 < \frac{1}{x} \leq 2$ ，解得 $x \leq -1$ ，或 $x \geq \frac{1}{2}$ 。

$\therefore$ 函数的定义域为 $(-\infty, -1] \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$ 。

考点练习一：

1. 函数 $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{2x^2-3x-2}$ 的定义域为()

A. $(-\infty, 1]$

B. $[-1, 1]$

C. $[1, 2) \cup (2, +\infty)$

D. $[-1, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, 1]$

解析：选 D 由题意得 $\begin{cases} 1-x^2 \geq 0, \\ 2x^2-3x-2 \neq 0, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} -1 \leq x \leq 1, \\ x \neq 2 \text{ 且 } x \neq -\frac{1}{2}, \end{cases}$ 即 $-1 \leq x \leq 1$ 且 $x \neq -\frac{1}{2}$ ，

所以函数的定义域为 $[-1, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, 1]$ 。故选 D。

2. 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{1-|x-1|}}{a^x-1}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的定义域为_____。

解析：由题意得 $\begin{cases} 1-|x-1| \geq 0, \\ a^x-1 \neq 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2, \\ x \neq 0, \end{cases}$ 即 $0 < x \leq 2$ ，故所求函数的定义域为 $(0, 2]$ 。

答案：(0, 2]。

3. 求下列函数的定义域：

(1) $y = 2 + \frac{3}{x-2}$; (2) $y = \sqrt{3-x} \cdot \sqrt{x-1}$; (3) $y = (x-1)^0 + \sqrt{\frac{2}{x+1}}$ 。

解：(1) 当且仅当 $x-2 \neq 0$ ，即 $x \neq 2$ 时，函数 $y = 2 + \frac{3}{x-2}$ 有意义，所以这个函数的定义域为 $\{x | x \neq 2\}$ 。

(2) 函数有意义，当且仅当 $\begin{cases} 3-x \geq 0, \\ x-1 \geq 0. \end{cases}$ 解得 $1 \leq x \leq 3$ ，所以这个函数的定义域为 $\{x | 1 \leq x \leq 3\}$ 。



$$(3) \text{ 函数有意义, 当且仅当 } \begin{cases} x-1 \neq 0, \\ \frac{2}{x+1} \geq 0, \\ x+1 \neq 0. \end{cases} \quad \text{解得 } x > -1, \text{ 且 } x \neq 1,$$

所以这个函数的定义域为 $\{x|x > -1, \text{ 且 } x \neq 1\}$.

4. 试求下列函数的定义域:

$$(1)f(x)=(x-1)^2+1; (2)f(x)=\frac{5x+4}{x-1}; (3)f(x)=x-\sqrt{x+1}.$$

解析: (1) 函数的定义域为 $\mathbf{R}$.

(2) 函数的定义域是 $\{x|x \neq 1\}$, $y = \frac{5x+4}{x-1} = 5 + \frac{9}{x-1}$, 所以函数的值域为 $\{y|y \neq 5\}$.

(3) 要使函数式有意义, 需 $x+1 \geq 0$, 即 $x \geq -1$, 故函数的定义域是 $\{x|x \geq -1\}$.

$$5. \text{ 记函数 } f(x) = \sqrt{2 - \frac{x+3}{x+1}} \text{ 的定义域为 } A, \text{ 求 } A.$$

解析: 由 $2 - \frac{x+3}{x+1} \geq 0$, 得 $\frac{x-1}{x+1} \geq 0$,

$$\text{它等价于 } \begin{cases} (x-1)(x+1) \geq 0, \\ x+1 \neq 0. \end{cases} \quad \text{即 } x < -1 \text{ 或 } x \geq 1 \quad \therefore A = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty).$$

考点练习二

6. 若函数 $f(x) = \sqrt{mx^2 + mx + 1}$ 的定义域为一切实数, 则实数 m 的取值范围是()

A. $[0, 4)$ B. $(0, 4)$ C. $[4, +\infty)$ D. $(0, 4]$

解析: 由题意得 $mx^2 + mx + 1 \geq 0$, 当 $m=0$ 时, $1 \geq 0$ 恒成立;

当 $m \neq 0$ 时, 则 $\begin{cases} m > 0, \\ \Delta = m^2 - 4m \leq 0, \end{cases}$ 解得 $0 < m \leq 4$, 故选 D.

7. 已知函数 $y = f(x^2 - 1)$ 的定义域为 $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, 则函数 $y = f(x)$ 的定义域为_____.

解析: $\because y = f(x^2 - 1)$ 的定义域为 $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, $\therefore x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, $x^2 - 1 \in [-1, 2]$, $\therefore y = f(x)$ 的定义域为 $[-1, 2]$.

答案: $[-1, 2]$.

8. 若函数 $f(x) = \sqrt{ax^2 + abx + b}$ 的定义域为 $\{x|1 \leq x \leq 2\}$, 则 $a+b$ 的值为_____.

解析: 函数 $f(x)$ 的定义域为不等式 $ax^2 + abx + b \geq 0$ 的解集, 不等式 $ax^2 + abx + b \geq 0$ 的解集 $\{x|1 \leq x \leq 2\}$,

$$\text{则 } \begin{cases} a < 0, \\ 1+2 = -\frac{b}{a}, \\ 1 \times 2 = \frac{b}{a} \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a = -\frac{3}{2}, \\ b = -3 \end{cases} \therefore a+b = -\frac{9}{2}.$$

9. 若函数 $f(2x)$ 的定义域是 $[-2, 2]$, 则函数 $y = f(x+1)$ 的定义域是_____.

解析: 由函数 $f(2x)$ 的定义域是 $[-2, 2]$, 得 $-2 \leq x \leq 2$.



$\therefore -4 \leq 2x \leq 4$ ，即函数 $f(x)$ 的定义域是 $[-4, 4]$ ，

再由 $-4 \leq x+1 \leq 4$ ，得： $-5 \leq x \leq 3$ 。

$\therefore$ 函数 $y=f(x+1)$ 的定义域是 $[-5, 3]$ 。

故答案为： $[-5, 3]$ 。

10. 若函数 $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x-1}}{mx^2+x+3}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，则 m 的取值范围为多少？

解析：要使原函数有意义，必须 $mx^2+x+3 \neq 0$ ，由于函数的定义域是 $\mathbf{R}$ ，故 $mx^2+x+3 \neq 0$ 对一切实数 x 恒成立。

当 $m=0$ 时， $x+3 \neq 0$ ，即 $x \neq -3$ ，与 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ 矛盾，所以 $m=0$ 不合题意。

当 $m \neq 0$ 时，有 $\Delta = 1^2 - 12m < 0$ ，解得 $m > \frac{1}{12}$ 。

故综上所述， m 的取值范围是 $\{m | m > \frac{1}{12}\}$ 。

答案： $\{m | m > \frac{1}{12}\}$ 。

11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 2]$ ，求 $g(x) = f(x) + f(-x)$ 的定义域。

解析：由题意得 $\begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ -1 \leq -x \leq 2 \end{cases}$ ，即 $\begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ -2 \leq x \leq 1 \end{cases}$ ，解得： $-1 \leq x \leq 1$ 。 $\therefore$ 定义域为 $[-1, 1]$ 。

12. 已知 $f(x+1)$ 的定义域为 $(2, 4)$ ，

(1) 求 $f(x)$ 的定义域；

(2) 求 $f(2x)$ 的定义域。

解：(1) $\because f(x+1)$ 的定义域为 $(2, 4)$ ，

$\therefore 2 < x < 4$ ，则 $3 < x+1 < 5$ ，

即 $f(x)$ 的定义域为 $(3, 5)$ ；

(2) $\because f(x)$ 的定义域为 $(3, 5)$ ；

$\therefore$ 由 $3 < 2x < 5$ 得 $\frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}$ ，

即 $f(2x)$ 的定义域为 $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ 。