衔接点 21 函数的概念

1．函数 $f(x)=\dfrac{1}{\lg(x+1)}+\sqrt{2-x}$ 的定义域为（　　）

A．$[-2,2]$　　　　B．$[-2,0)\cup(0,2]$

C．$(-1,0)\cup(0,2]$　　　　D．$(-1,2]$

【答案】C

【解析】$f(x)=\dfrac{1}{\lg(x+1)}+\sqrt{2-x}\Rightarrow\begin{cases}x+1>0\Rightarrow x>-1\\ \lg(x+1)\neq 0\Rightarrow x\neq 0\Rightarrow x\in(-1,0)\cup(0,2]\\ 2-x\geq 0\Rightarrow x\leq 2\end{cases}$

故答案选 C.

2．下列四组函数中，表示同一函数的是（　　）

A．$y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=\sqrt[3]{x^3}$　　　　B．$y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=|x|$

C．$y=(\sqrt{x})^2$ 与 $y=x$　　　　D．$y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=x$

【答案】B

【解析】在 A 中，$y=\sqrt{x^2}=|x|$，$y=\sqrt[3]{x^3}=x$，对应法则不同；

在 B 中，$y=\sqrt{x^2}=|x|$ 和 $y=|x|$ 对应法则相同，且定义域都为 R，为同一函数；

在 C 中，$y=(\sqrt{x})^2$ 的定义为 $[0,+\infty)$，而 $y=x$ 的定义域为 R，定义域不同；

在 D 中，$y=\sqrt{x^2}=|x|$ 和 $y=x$ 的对应法则不同；故选 B.

3．若函数 $f(x)=\sqrt{x^2+ax+1}$ 的定义域为实数集 R，则实数 a 的取值范围为（　　）

A．$(-2,2)$　　　　B．$(-\infty,\ -2)\cup(2,+\infty)$

C．$(-\infty,\ -2]\cup[2,+\infty)$　　　　D．$[-2,2]$

【答案】D

【解析】因为函数 $f(x)=\sqrt{x^2+ax+1}$ 的定义域为实数集 R，所以开口向上的二次函数的图象，与 x 轴没有交点，即 $\Delta=a^2-4\leq 0,-2\leq a\leq 2$，即实数 a 的取值范围为 $[-2,2]$，故选 D.

4．若 $f\left(x\right)=x^2-2x$，则 $f\left(f\left(f\left(1\right)\right)\right)=$（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

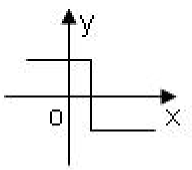
【答案】C

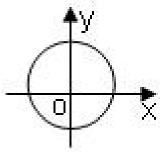
【解析】由 $f\left(x\right)=x^2-2x$，可得 $f\left(1\right)=1-2=-1$；

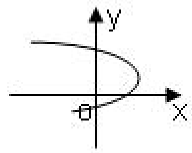
所以 $f\left(f\left(1\right)\right)=f\left(-1\right)=1+2=3$；

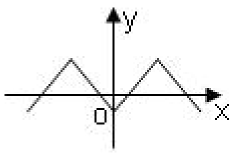
$f\left(f\left(f\left(1\right)\right)\right)=f\left(3\right)=9-6=3$.故选 C.

5．在下列图象中，函数 $y=f(x)$ 的图象可能是（　　）

A．

B．

C．

D．

【答案】D

【解析】对于 A，存在一个自变量 x 对应两个值，错误；对于 B，存在自变量 x 对应两个值，错误；对于 C，存在自变量 x 对应两个值，错误；对于 D，定义域内每个自变量都有唯一实数与之对应，正确，故选 D.

6．函数 $f\left(x\right)=\sqrt{x+1}+\dfrac{2}{x-1}$ 的定义域是____________.

【答案】$\left[-1,1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$

【解析】由题意可得 $\begin{cases}x+1\geq 0\\x-1\neq 0\end{cases}$，解得 $x\geq -1$ 且 $x\neq 1$，

所以，函数 $y=f\left(x\right)$ 的定义域为 $\left[-1,1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$.故答案为：$\left[-1,1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$.

7．函数 $y=\sqrt{x-1}$ 的定义域为______.

【答案】$[1,+\infty)$

【解析】要使得函数有意义，则 $x-1\geq 0$，解得 $x\in\left[1,+\infty\right)$.故答案为 $\left[1,+\infty\right)$.

8．设函数 $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$.

(1)求 $f(x)$的定义域；

(2)求证：$f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=0$.

【答案】（1）$\{x \mid x \neq \pm 1\}$；（2）详见解析.

【解析】（1）由$1-x^2 \neq 0$解得$x \neq \pm 1$，所以$f(x)$的定义域为$\{x \mid x \neq \pm 1\}$.

（2）依题意 $f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=\dfrac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}+\dfrac{1+x^2}{1-x^2}=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}-\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=0$ 得证.

9.函数 $y=x-\sqrt{4x-x^2}$ 的值域为（　　）.

A. $\left[2-2\sqrt{2},4\right]$　　B. $[0,4]$

C. $\left[0,2+2\sqrt{2}\right]$　　D. $\left[2-2\sqrt{2},2+2\sqrt{2}\right]$

【答案】A

【解析】因为 $y=x-\sqrt{4x-x^2}$

由 $4x-x^2 \geqslant 0$，解得 $0 \leqslant x \leqslant 4$.

可得函数 $y=f(x)=x-\sqrt{4x-x^2}$ 的定义域为：$[0,4]$.

又 $f'(x)=1-\dfrac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}}=\dfrac{\sqrt{4x-x^2}-(2-x)}{\sqrt{4x-x^2}}$.

令 $g(x)=\sqrt{4x-x^2}-(2-x)$，则 $g'(x)=(2-x)\left(4x-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}+1>0$，即 $f'(x)$ 在$[0,4]$上单调递增，

令 $\sqrt{4x-x^2}-(2-x)=0$，解得 $x=2-\sqrt{2}$，

即 $f(x)$ 在$\left[0,2-\sqrt{2}\right]$上单调递减，在$\left[2-\sqrt{2},4\right]$上单调递增，

所以 $x=2-\sqrt{2}$ 为极小值点，

又 $f(2-\sqrt{2})=2-2\sqrt{2}$，$f(0)=0$，$f(4)=4$.

$\therefore$ 函数 $y=x-\sqrt{4x-x^2}$ 的值域为$\left[2-2\sqrt{2},4\right]$. 故选A.

10．若函数 $y=f(x)$的定义域是$[0,2]$，则函数 $g(x)=\dfrac{f(2x)}{2x}$ 的定义域是（　　）

A. $[0,4]$ B. $(0,4]$ C. $(0,1]$ D. $(0,2]$

【答案】C

【解析】$\because$ 函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0,2]$，

$\therefore g(x)=\dfrac{f(2x)}{2x}$ 的定义域须满足 $\begin{cases}0\le 2x\le 2\\ x\ne 0\end{cases}$，解得 $0<x\le 1$，所以函数 $g(x)$ 的定义域为 $(0,1]$.故选：C.

11．函数 $f(x)=\sqrt{2x-1}+x$ 的值域是（ ）

A. $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ B. $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$ C. $(0,+\infty)$ D. $[1,+\infty)$

【答案】A

【解析】令 $\sqrt{2x-1}=t$，且 $t\ge 0$，

则 $x=\dfrac{t^2+1}{2}$，函数转化为 $y=t+\dfrac{t^2+1}{2}=\dfrac{1}{2}(t+1)^2$

由 $t\ge 0$，则 $y\geqslant\dfrac{1}{2}$，即值域为 $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$，故选：A.

12．函数 $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{x^2+1}}$ 的定义域为( )

A. $(-1,2]$ B. $[2,+\infty)$

C. $(-\infty,-1)\cup[1,+\infty)$ D. $(-\infty,-1)\cup[2,+\infty)$

【答案】B

【解析】函数 $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{x^2+1}}$，令 $\dfrac{x-2}{x^2+1}\ge 0$，得 $x-2\ge 0$，

解得 $x\ge 2$，所以 $f(x)$ 的定义域为 $[2,+\infty)$.故选：B

13．函数 $f(x)=\sqrt{-x^2-2x+1}$ 的值域是（ ）

A. $(-\infty,2]$ B. $(0,+\infty)$ C. $[2,+\infty)$ D. $[0,\sqrt{2}]$

【答案】D

【解析】令 $g(x)=-x^2-2x+1=-(x+1)^2+2$，

则有：当 $x=-1$ 时，$(g(x))_{\max}=2$，即

$(f(x))_{\max}=\sqrt{2}$，

因为 $f(x)=\sqrt{-x^2-2x+1}$ 为根式函数，则 $f(x)\geq 0$，所以 $0\leq f(x)\leq\sqrt{2}$，故选：D

14．下列每组函数是同一函数的是(　　)

A．$f(x)=x+1, g(x)=\left(\sqrt{x+1}\right)^2$　　B．$f(x)=|x-2|, g(x)=\sqrt{(x-2)^2}$

C．$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，$g(x)=x+1$　D．$f(x)=\sqrt{(x-1)(x-2)}$，$g(x)=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-2}$

【答案】B

【解析】对于 A 中，函数 $f(x)=x+1, g(x)=\left(\sqrt{x+1}\right)^2=x+1$，

$f(x)$ 的定义域为 R，$g(x)$ 的定义域为 $[-1,+\infty)$

所以两函数定义域不同，所以不是同一函数；

对于 B 中，$f(x)=|x-2|, g(x)=\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|$，

两函数的定义域都是 R，且对应法则相同，所以是同一函数；

对于 C 中，函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的定义域为 $\{x\,|\,x\in R$ 且 $x\neq 1\}$，

函数 $g(x)=x+1$ 的定义域为 R，两函数的定义域不同，

所以两函数不是同一函数；

对于 D 中，

函数 $f(x)=\sqrt{(x-1)(x-2)}$ 满足 $(x-1)(x-2)\geq 0$，解得 $x\leq 1$ 或 $x\geq 2$，

可知 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$

函数 $g(x)=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-2}$ 满足 $\begin{cases}x-1\geq 0\\x-2\geq 0\end{cases}$，解得 $x\geq 2$，

可知 $g(x)$ 的定义域为 $[2,+\infty)$，两函数的定义域不同，所以不是同一函数.故选：B.

15．函数 $y=x^2-2x, x\in[0,3]$ 的值域为（　　）

A. $[0,3]$　　B. $[1,3]$　　C. $[-1,0]$　　D. $[-1,3]$

【答案】D

【解析】$\because$ $y=x^2-2x=(x-1)^2-1$，

$\therefore$ 对称轴为 $x=1$，抛物线开口向上，$\because$ $0\le x\le 3$，$\therefore$ 当 $x=1$ 时，$y_{\min}=-1$，

$\because$ -1 距离对称轴远，$\therefore$ 当 $x=3$ 时，$y_{\max}=3$，$\therefore$ $-1\le y\le 3$.故选：D.

16. 函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+1}}{1-x}$ 的定义域为(　　)

A. $\{x\,|\,x\ne -\frac{1}{2}$ 且 $x\ne 1\}$　　B. $\{x\,|-\frac{1}{2}<x<1$ 或 $x>1\}$

C. $\{x\,|\,x\ge -\frac{1}{2}$ 或 $x\ne 1\}$　　D. $\{x\,|\,x\ge -\frac{1}{2}$ 且 $x\ne 1\}$

【答案】D

【解析】由题意，函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+1}}{1-x}$ 有意义，则满足 $\begin{cases}2x+1\ge 0\\1-x\ne 0\end{cases}$，解得 $x\ge -\frac{1}{2}$ 且 $x\ne 1$，

即函数的定义域为 $\{x\,|\,x\ge -\frac{1}{2}$ 且 $x\ne 1\}$.故选：D.

17. 已知函数 $f(x)=x-[x], x\in R$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，如 $\left[-\frac{3}{2}\right]=-2$，$[-3]=-3$，$\left[\frac{5}{2}\right]=2$，

则 $f(x)$ 的值域是（）

A.（0，1）　　B. $(0,1]$　　C. $[0,1)$　　D. $[0,1]$

【答案】C

【解析】∵$[x]$是不超过 x 的最大整数，f（x）$=x-[x]$，

∴函数f（x）的定义域是 R，∵$[x]\le x<[x]+1$，∴$0\le x-[x]<1$，

即 f（x）的值域是[0，1)；故选：C.

18. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{2+x}+\sqrt{9-x^2}$ 的定义域为（　　）

A. $\{x\,|\,x\ne -2\}$　　B. $\{x\,|-3\le x\le 3$ 且 $x\ne -2\}$

C. $\{x\,|-3\le x\le 3\}$　　D. $\{x\,|-3\le x\le 3$ 且 $x\ne 2\}$

【答案】B

【解析】函数 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2+x}+\sqrt{9-x^2}$，

则定义域满足 $\begin{cases}2+x\neq 0\\ 9-x^2\geq 0\end{cases}$，解得 $\{x\mid -3\leq x\leq 3$ 且 $x\neq -2\}$，故选：B.

19．下列函数中与函数 $y=x$ 为同一函数的是（　　）

A．$y=\left(\sqrt{x}\right)^2$　　B．$y=\dfrac{x^2}{x}$　　C．$y=\sqrt{x^2}$　　D．$y=\sqrt[3]{x^3}$

【答案】D

【解析】两个函数相等，则两个函数的定义域相同，对应法则相同，函数 $y=x$ 的定义域为 R，

对于 A 选项，函数 $y=\left(\sqrt{x}\right)^2$ 的定义域为 $\left[0,+\infty\right)$，该函数与函数 $y=x$ 不相等；

对于 B 选项，函数 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 的定义域为 $\left\{x\middle|x\neq 0\right\}$，该函数与函数 $y=x$ 不相等；

对于 C 选项，函数 $y=\sqrt{x^2}$ 的定义域为 R，且 $y=\sqrt{x^2}=\left|x\right|$，该函数与函数 $y=x$ 不相等；

对于 D 选项，函数 $y=\sqrt[3]{x^3}$ 的定义域为 R，且 $y=\sqrt[3]{x^3}=x$，该函数与函数 $y=x$ 相等.

故选：D.

20．设函数 $y=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ 的定义域为 M，那么（　　）

A．$\{x\mid x>-1$ 且 $x\neq 0\}$　　B．$\{x\mid x>-1\}$

C．$M=\{x\mid x<-1$ 或 $x>0\}$　　D．$M=\{x\mid x<-1$ 或 $-1<x<0$ 或 $x>0\}$

【答案】B

【解析】由题意，可知 $\begin{cases}\sqrt{1+x}\neq 0\\ 1+x\geq 0\end{cases}$，解得 $x>-1$.故选：B.

21．函数 $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$ 的定义域为[2，5)，则其值域为__.

【答案】$\left(\dfrac{1}{2},2\right]$

【解析】$\because 2\leq x<5$，$\therefore 1\leq x-1<4$，

$\therefore \dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{x-1}\leq 1$，$\therefore \dfrac{1}{2}<\dfrac{2}{x-1}\leq 2$，$\therefore f\left(x\right)$ 的值域为 $\left(\dfrac{1}{2},2\right]$，故答案为：$\left(\dfrac{1}{2},2\right]$.

22．函数 $f\left(x\right)=2x+\sqrt{2x-1}$ 的值域是__________.

【答案】$\left[1,+\infty\right)$

【解析】由函数有意义可得: $2x-1\geq 0$,解得: $x\geq\dfrac{1}{2}$,

所以函数 $f(x)$ 的定义域为: $[\dfrac{1}{2},+\infty)$,

又函数 $f(x)=2x+\sqrt{2x-1}$ 在 $[\dfrac{1}{2},+\infty)$ 上是增函数,

所以 $f(x)\geq f(\dfrac{1}{2})=2\times\dfrac{1}{2}+\sqrt{2\times\dfrac{1}{2}-1}=1$,

所以函数 $f\left(x\right)=2x+\sqrt{2x-1}$ 的值域是: $[1,+\infty)$.故答案为: $[1,+\infty)$.

23．定义在 $\left(1,+\infty\right)$ 上的函数 $f\left(x\right)$ 满足下列两个条件（1）对任意的 $x\in\left(1,+\infty\right)$ 恒有 $f\left(2x\right)=2f\left(x\right)$ 成立；（2）当 $x\in\left(1,2\right]$ 时， $f\left(x\right)=2-x$ ．则 $f\left(6\right)$ 的值是__________.

【答案】2

【解析】因为对任意的 $x\in\left(1,+\infty\right)$ 恒有 $f\left(2x\right)=2f\left(x\right)$ 成立，

所以有： $f\left(6\right)=f\left(2\times 3\right)=2f\left(3\right)=2f\left(2\times\dfrac{3}{2}\right)=4f\left(\dfrac{3}{2}\right)$ ，

又因为当 $x\in\left(1,2\right]$ 时， $f\left(x\right)=2-x$ ，

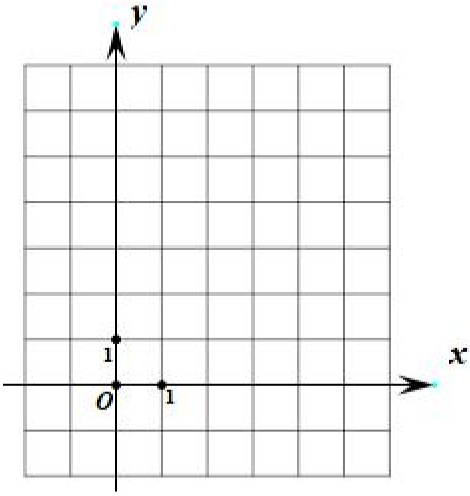
所以 $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=2-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}$ ，所以 $f\left(6\right)=4f\left(\dfrac{3}{2}\right)=2$ 故答案为：2

24．已知函数 $y=\dfrac{1}{kx^2+2kx+3}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，则实数 k 的取值范围是__________.

【答案】$0\leq k<3$.

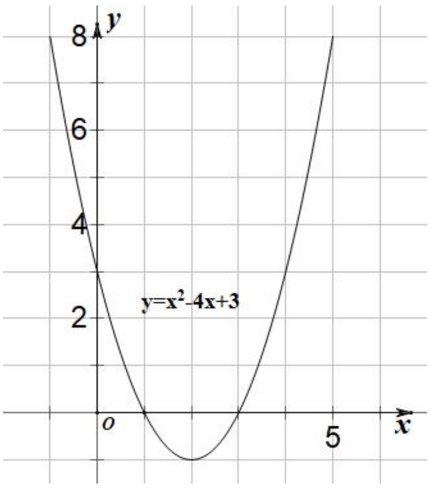
【解析】当 k=0 时， $y=\dfrac{1}{3}$ ，满足条件当 $\mathrm{k}\neq 0$ 时， $4k^2-12k<0$ 综上： $0\leq \mathrm{k}<3$.

25．作出函数 $y=x^2-4x+3$ 的简图，并由图象求函数 $f\left(x\right)$ 的值域.



【答案】图象见解析，值域$[-1,+\infty)$

【解析】$a>0$ 开口向上，对称轴为$x=2$ ，顶点$(2,-1)$



由图像可知函数的值域为$[-1,+\infty)$.

26．求函数 $y=x-\sqrt{1-2x}$ 的值域.

【答案】$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$

【解析】设$t=\sqrt{1-2x}$ 则$t\geq 0$且$x=-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}$，

得$y=-\frac{1}{2}t^2-t+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}(t+1)^2+1$，

因为$t\geq 0$，所以$y\leqslant\frac{1}{2}$，所以该函数的值域为$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$.

27．求函数$y=\sqrt{5-x}+\sqrt{x-1}-1$的定义域.

【答案】$[1,5]$

【解析】由不等式组$\begin{cases}5-x\geq 0\\ x-1\geq 0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x\leq 5\\ x\geq 1\end{cases}$，即$1\leqslant x\leqslant 5$，故函数的定义域是$\{x|1\leq x\leq 5\}$.

28．求下列函数的定义域：

（1）$f(x)=2+\dfrac{3}{x-2}$；

（2）$f(x)=(x-1)^0+\sqrt{\dfrac{2}{x+1}}$；

（3）$f(x)=\sqrt{3-x}\sqrt{x-1}$；

（4）$f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x+1}-\sqrt{1-x}$.

【解析】（1）当且仅当$x-2\neq 0$，

即$x\neq 2$时，函数$f(x)=2+\dfrac{3}{x-2}$有意义，

所以这个函数的定义域为$\{x|x\neq 2\}$.

（2）函数有意义，当且仅当$\begin{cases}x-1\neq 0\\ \dfrac{2}{x+1}\geq 0\\ x+1\neq 0\end{cases}$，

解得$x>-1$且$x\neq 1$，

所以这个函数的定义域为$\{x|x>-1且x\neq 1\}$.

（3）函数有意义，当且仅当$\begin{cases}3-x\geq 0\\ x-1\geq 0\end{cases}$，

解得$1\leq x\leq 3$，

所以这个函数的定义域为$\{x|1\leq x\leq 3\}$.

(4)要使函数有意义，自变量x的取值必须满足$\begin{cases}x+1\neq 0\\ 1-x\geq 0\end{cases}$，

解得$x\leq 1$且$x\neq -1$，

即函数定义域为$\{x|x\leq 1且x\neq -1\}$.