2020~2021学年四川成都金牛区成都市实验外国语学校高一上学期开学考试数学试卷（成实外教育集团）(详解)

一、选择题

（本大题共10小题，每小题3分，共30分）

1. 若$x+1$与-2互为相反数，则x的值为（　）.

A. -1　　B. 1　　C. -2　　D. 2

【答案】B

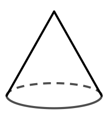
【解析】若$x+1$与-2互为相反数，则$x+1+(-2)=0$，

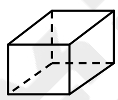
$\therefore x+1-2=0$，即$x=1$，

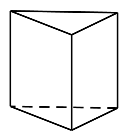
故x的值为1.

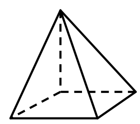
故选B.

2. 下列几何体中，俯视图为三角形的是（　）.

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】C

【解析】A 选项：该几何体的俯视图是图形，故A项错误；

B 选项：该几何体的俯视图是矩形，故B项错误；

C 选项：该几何体的俯视图是三角形，故C项正确；

D 选项：该几何体的俯视图是四边形，故D项错误.

故选 C .

3. 在“新冠”疫情期间，全国人民“众志成城，同心抗疫”，生物学家发现一种新冠病毒的变异毒株的长度约为0.00000013米，利用科学记数法表示为（　）.

A. 1.3×10^{6}米　　B. 1.3×10^{-6}米　　C. 1.3×10^{-7}米　　D. 1.3×10^{7}米

【答案】C

【解析】科学记数法的标准形式是：$a\times10^{n}(1\leqslant a<10)$，

$\therefore 0.00000013$米$=1.3\times10^{-7}$米．

故选C．

4. 已知点$A(a,2)$与点$B(-3,b)$关于原点对称，则$a+b$的值为（　）．

A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. -2

【答案】A

【解析】点$A(a,2)$与点$B(-3,b)$关于原点对称，

$\therefore a=-(-3)=3$，$b=-2$，

$\therefore a+b=3-2=1$．

故选A．

5. 下列运算正确的是（　）．

A. $x^{3}\div x=3$　　B. $\left(x^{2}y\right)^{2}=x^{4}y$

C. $(x-y)^{2}=x^{2}-y^{2}$　　D. $(-x-y)(x-y)=y^{2}-x^{2}$

【答案】D

【解析】A 选项：$x^{3}\div x=x^{2}$，故A错误；

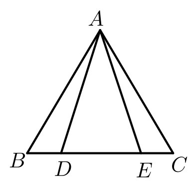
B 选项：$\left(x^{2}y\right)^{2}=x^{4}y^{2}$，故B错误；

C 选项：$(x-y)^{2}=x^{2}-2xy+y^{2}$，故C错误；

D 选项：$(-x-y)(x-y)=-(x+y)(x-y)=-\left(x^{2}-y^{2}\right)=y^{2}-x^{2}$，故D正确．

故选 D .

6. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，点D，E都在边BC上，$\angle BAD=\angle CAE$，若$BD=3$，则CE的长为（　）．



A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

【答案】B

【解析】$\because AB=AC$，

$\therefore \angle B=\angle C$，

$\therefore$在$\triangle ABD$和$\triangle ACE$中，

$\begin{cases}\angle BAD=\angle CAE\\ AB=AC\\ \angle B=\angle C\end{cases}$，

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle ACE(\mathrm{ASA})$，

$\therefore CE=BD=3$.

故选B．

7. 成实外教育集团某中学举行“读一百本好书”活动月中，2020年6月份对八年级（20）班45人所阅读书籍数量情况的统计结果如下表所示：

阅读数量	1本	2本	3本	3本以上
人数（人）	10	18	13	4

根据统计结果，阅读2本书籍的人数最多，2本是这组数据的（ ）．

A. 平均数 B. 方差 C. 中位数 D. 众数

【答案】D

【解析】在45个人中，有18个人的阅读数量为2本，故2本是这组数据的众数．

故选D．

8. 分式方程$\dfrac{x-5}{x-1}+\dfrac{m}{x}=1$的解为$x=-1$，则$m$的值为（ ）．

A. $m=-1$ B. $m=1$ C. $m=-2$ D. $m=2$

【答案】D

【解析】$x=-1$是分式方程$\dfrac{x-5}{x-1}+\dfrac{m}{x}=1$的解，

$\because \dfrac{-1-5}{-1-1}+\dfrac{m}{-1}=1$，

$\therefore \dfrac{-6}{-2}-m=1$，

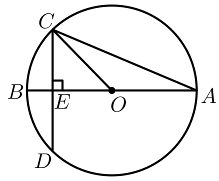
$\therefore 3-m=1$，

$\therefore m=3-1=2$，

故m的值为2．

故选D．

9. 如图，$\odot O$的直径AB垂直于弦CD，垂足为E，$\angle A=22.5^\circ$，则$\angle OCD$的度数为（ ）．



A. 30° B. 40° C. 45° D. 50°

【答案】C

【解析】$\because$直径AB垂直于弦CD，即$AB\perp CD$，

$\therefore \angle OEC=90^\circ$，

$\therefore \angle BOC=2\angle A=2\times 22.5^\circ=45^\circ$，

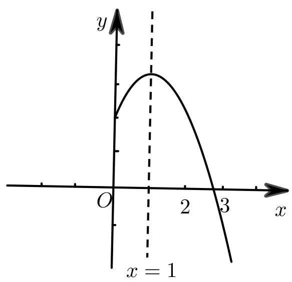
$\therefore \angle OCD=180^\circ-\angle BOC-\angle OEC$

$=180^\circ-45^\circ-90^\circ$

$=45^\circ$．

故答案选C．

10. 如图是二次函数$y=ax^2+bx+c$（a，b，c是常数，$a\neq 0$）图象的一部分，与x轴的交点在点$(2,0)$和$(3,0)$之间，对称轴是$x=1$．对于下列说法：①$ab<0$；②$2a+b=0$；③$3a+c>0$；④$a+b\geqslant m(am+b)$（m为实数）；⑤当$-1<x<3$时，$y>0$，其中正确的是（ ）．



A. ①②④ B. ①②⑤ C. ②③④ D. ③④⑤

【答案】A

【解析】①∵抛物线开口向下，

∴$a < 0$，

∵对称轴在y轴右侧，

∴a，b异号，

∴$ab < 0$，故①正确；

②∵对称轴$x = -\dfrac{b}{2a} = 1$，

∴$2a + b = 0$，故②正确；

③∵$2a + b = 0$，

∴$b = -2a$，

∵当$x = -1$时，$y = a - b + c < 0$，

∴$a - (-2a) + c = 3a + c < 0$，故③错误；

④根据图象知，当$x = 1$时，有最大值，

当$m \neq 1$时，有$am^2 + bm + c \leqslant a + b + c$，

∴$a + b \geqslant m(am + b)$（$m$为实数），故④正确；

⑤由图象知，当$-1 < x < 3$时，y不只是大于0，故⑤错误；

∴综上所述：正确的是①②④．

故选A．

二、填空题

（本大题共4小题，每小题4分，共16分）

11. 已知α为锐角，且满足$2\sin(\alpha + 20^\circ) = 1$，则$\alpha$为 ______ 度．

【答案】10

【解析】∵$2\sin(\alpha + 20^\circ) = 1$，

∴$\sin(\alpha + 20^\circ) = \dfrac{1}{2}$，

∵α为锐角，

∴$\alpha + 20^\circ = 30^\circ$，

∴$\alpha = 30^\circ - 20^\circ = 10^\circ$．

故α为10度．

【踩分点】

12. 关于x的一元二次方程$mx^2-3x-1=0$有两个不相等的实根，则m的取值范围是 ______ .

【答案】$m>-\frac{9}{4}$且$m\neq 0$

【解析】由题意可知：$\begin{cases} m\neq 0 \\ (-3)^2-4\times m\times(-1)>0 \end{cases}$，

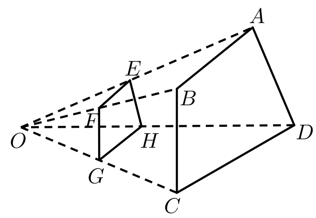
$\therefore \begin{cases} m\neq 0 \\ 9+4m>0 \end{cases}$，

$\therefore \begin{cases} m\neq 0 \\ m>-\frac{9}{4} \end{cases}$，

即m的取值范围是：$m>-\frac{9}{4}$且$m\neq 0$.

【踩分点】

13. 如图，四边形$ABCD$与四边形$EFGH$是位似图形，位似中心是点O，已知$\frac{OE}{OA}=\frac{3}{5}$，$\frac{S_{四边形EFGH}}{S_{四边形ABCD}}=$ ______ .



【答案】$\frac{9}{25}$

【解析】$\because$四边形 $ABCD$ 与四边形 $EFGH$ 位似，

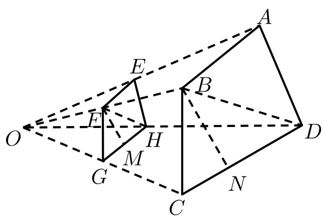
$\therefore\triangle OEF\sim\triangle OAB$，$\triangle OFG\sim\triangle OBC$，$OGH\sim\triangle OCD$，

$\therefore\frac{OF}{OB}=\frac{OE}{OA}$，$\frac{FG}{BC}=\frac{OF}{OB}$，$\frac{GH}{CD}=\frac{FG}{BC}$，

又$\because\frac{OE}{OA}=\frac{3}{5}$，

$\therefore\frac{FG}{BC}=\frac{GH}{CD}=\frac{OF}{OB}=\frac{3}{5}$，

连接 FH、BD，过点 F 作 GH 的垂线交 GH 于点 M，



过点 B 作 CD 的垂线交 CD 于点 N，

同理可证，$\dfrac{FM}{BN}=\dfrac{3}{5}$，

又$\because S_{\triangle FGH}=\dfrac{1}{2}GH\cdot FM$，$S_{\triangle BCD}=\dfrac{1}{2}CD\cdot BN$，

$\therefore \dfrac{S_{\triangle FGH}}{S_{\triangle BCD}}=\dfrac{GH\cdot FM}{CD\cdot BN}=\dfrac{9}{25}$，

同理可证 $\dfrac{\triangle EFH}{\triangle ABD}=\dfrac{9}{25}$，

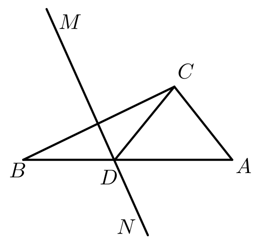
又$\because S_{四边形EFGH}=S_{\triangle EFH}+S_{\triangle FGH}$，$S_{四边形ABCD}=S_{\triangle BCD}+S_{\triangle ABD}$，

$\therefore \dfrac{S_{四边形EFGH}}{S_{四边形ABCD}}=\dfrac{S_{\triangle EFH}+S_{\triangle FGH}}{S_{\triangle BCD}+S_{\triangle ABD}}=\dfrac{9}{25}$．

故答案为：$\dfrac{9}{25}$．

【踩分点】

14. 如图，在已知的$\triangle ABC$中，按以下步骤作图：①分别以B，C为圆心，以大于$\dfrac{1}{2}BC$的长为半径作弧，两弧相交于两点M、N；②作直线MN交AB于点D，连接CD．若$CD=AC$，$\angle B=25^\circ$，则$\angle ACB$的度数为 ______ ．



【答案】105°

【解析】根据该尺规作图的方法可知，MN是线段BC的垂直平分线，

根据垂直平分线的性质可知，$CD=BD$，

$\therefore \angle B=\angle DCB$，

$\because \angle B=25^\circ$，

$\therefore \angle DCB=25^\circ$，

$\therefore \angle ADC=\angle B+\angle DCB=50^\circ$，

又$\because CD=AC$，

根据等腰三角形性质得$\angle A=\angle ADC$，

$\therefore \angle A=50^\circ$，

$\because$三角形内角和为180°，

$\therefore \angle ACD=180^\circ-50^\circ-50^\circ=80^\circ$，

又$\because \angle DCB=25^\circ$，

$\therefore \angle ACB=80^\circ+25^\circ=105^\circ$．

故答案为：105°．

【踩分点】

三、解答题

（本大题共6小题，共54分）

15.

（1）计算：$\sqrt{9}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}+(-2020-\pi)^0+|2\sin 60^\circ-2|$．

（2）解不等式组：$\begin{cases}\frac{x-1}{2}+3>2x-1\cdots ① \\ 1-3(x+1)\leqslant 4-x\cdots ②\end{cases}$．

【答案】（1）$4-\sqrt{3}$．

（2）$-3\leqslant x<\frac{7}{3}$．

【解析】（1）$\sqrt{9}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}+(-2020-\pi)^0+|2\sin 60^\circ-2|$

$=3-2+1+\left|2\times\frac{\sqrt{3}}{2}-2\right|$

$=3-2+1+\left|\sqrt{3}-2\right|$

$=3-2+1+2-\sqrt{3}$

$=4-\sqrt{3}$．

（2）①：$x-1+6>4x-2$

$3x<7$

$x<\frac{7}{3}$，

②：$1-3x-3\leqslant 4-x$

$2x\geqslant -6$

$x\geqslant -3$，

综上所述：该不等式组的解是：$-3\leqslant x<\frac{7}{3}$．

【踩分点】

16. 先化简，再求值：$\frac{m-3}{3m^2-6m}\div\left(m+2-\frac{5}{m-2}\right)$，其中$m$是方程$x^2+3x+1=0$的根．

【答案】$-\dfrac{1}{3}$.

【解析】$\dfrac{m-3}{3m^2-6m}\div\left(m+2-\dfrac{5}{m-2}\right)$

$=\dfrac{m-3}{3m(m-2)}\div\dfrac{(m+2)(m-2)-5}{m-2}$

$=\dfrac{m-3}{3m(m-2)}\div\dfrac{m^2-4-5}{m-2}$

$=\dfrac{m-3}{3m(m-2)}\times\dfrac{m-2}{m^2-9}$

$=\dfrac{m-3}{3m}\times\dfrac{1}{(m+3)(m-3)}$

$=\dfrac{1}{3m(m+3)}$,

$\because m$是方程$x^2+3x+1=0$的根,

$\therefore m^2+3m+1=0$,即$m^2+3m=-1$,

$\therefore$原式$=\dfrac{1}{3(m^2+3m)}=\dfrac{1}{3\times(-1)}=-\dfrac{1}{3}$.

【踩分点】

17. 四川成都素有“天府之国”的美誉.某校九年级(2)班数学兴趣小组为了解九年级学生对“蜀都历史文化”的了解情况,对九年级(2)班的同学进行随机抽样调查,并将调查结果绘制成如下两幅统计图,根据统计图的信息,解答下列问题:

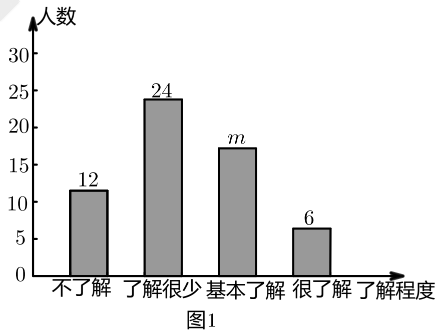


图1

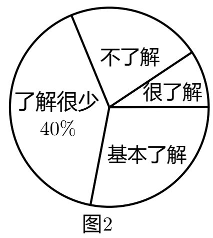


图2

(1)若该校九年级共有学生1200名,则九年级约有多少名学生基本了解“蜀都历史文化”?

(2)根据调查结果,发现九年级(2)班学生中了解程度为“很了解”的学生有三名非常优秀,其中有两名男生、一名女生,现准备从这三名学生中随机选择两人参加成都市“蜀都历史文化”知识竞赛,用树状图或列表法,求恰好选中一男生一女生的概率.

【答案】(1)360名.

(2)$\dfrac{2}{3}$.

【解析】(1)由两幅统计图可知,

有24名同学对“蜀都历史文化”了解很少，且占所抽查总人数的40%，

则本次抽查的总人数为$24 \div 40\% = 60$（名），

所以$m = 60 - 12 - 24 - 6 = 18$，

故若该校九年级共有学生1200名，

则九年级约有$\frac{18}{60} \times 1200 = 360$名学生基本了解“蜀都历史文化”.

（2）由题意可知，设两名男生分别为A_1，A_2，一名女生为B_1，

列表如下：

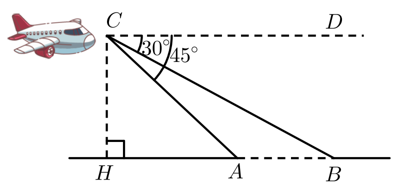
	A_1	A_2	B_1
A_1		(A_1, A_2)	(A_1, B_1)
A_2	(A_2, A_1)		(A_2, B_1)
B_1	(B_1, A_1)	(B_1, A_2)	

由上表可知，共6种可能，其中一男一女的可能性有4种，

所以恰好选中一男生一女生的概率为$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

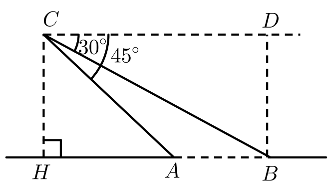
【踩分点】

18. 如图，为打造成都市“公园城市，实现最美旅居环境”某工程队在建设中需要测量某地块的宽度AB，无人飞机在C处测得A，B两点的俯角分别为$\angle DCA = 45°$和$\angle DCB = 30°$．若飞机离地面的高度CH为1800米，且点H，A，B在同一水平直线上，求这块地的宽度AB为多少米？（结果保留根号）．



【答案】$1800\left(\sqrt{3} - 1\right)$米.

【解析】连接DB，因为$CD // HB$，



所以$\angle CAH = \angle ACD = 45°$，

$\angle CBH = \angle BCD = 30°$，

在$\mathrm{Rt}\triangle ACH$中，

因为$\angle CAH=45^\circ$，

所以$AH=CH=1800$（米），

在$\mathrm{Rt}\triangle HCB$中，因为$\tan\angle CBH=\dfrac{CH}{HB}$，

所以$HB=\dfrac{CH}{\tan\angle CBH}=\dfrac{1800}{\tan 30^\circ}$，

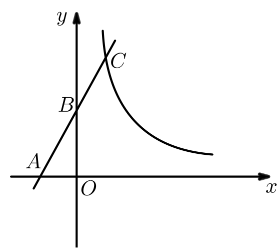
$=\dfrac{1800}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=1800\sqrt{3}$（米），

所以$AB=HB-HA=1800\sqrt{3}-1800=1800\left(\sqrt{3}-1\right)$（米），

故答案为：$1800\left(\sqrt{3}-1\right)$米.

【踩分点】

19. 如图，已知直线$y=2x+2$与x轴、y轴分别相交于A，B两点，与双曲线$y=\dfrac{k}{x}$在第一象限内交于点C，且$AC=2AB$.



（1）求反比例函数的解析式.

（2）在Q为x轴上一点，若$S_{\triangle QAC}=8$时，试求点Q的坐标.

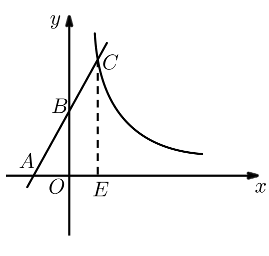
（3）点$D(4,a)$为此双曲线在第一象限上的一点，点P为x轴上一动点，试确定点P的坐标，使得$PC+PD$的值最小.

【答案】（1）$y=\dfrac{4}{x}$.

（2）$(3,0)$或$(-5,0)$.

（3）点P的坐标为$\left(\dfrac{17}{5},0\right)$时，使得$PC+PD$的值最小.

【解析】（1）如图所示，作$CE\perp x$轴于点E，



根据题意可知$A(-1,0)$，$B(0,2)$.

$\because OB//CE$，$AC=2AB$，

$\therefore OB$为三角形ACE的中位线，

$\therefore AB=BC$，$AO=AE=1$，$EC=2OB=4$.

$\therefore$点C的坐标为$(1,4)$，

把$C(1,4)$代入$y=\dfrac{k}{x}$中，解得$k=4$，

$\therefore$反比例函数解析式为$y=\dfrac{4}{x}$.

（2）$\because$点Q在x轴上，

设点Q的坐标为$(m,0)$，

$\therefore AQ=|m+1|$，

$\therefore S_{\triangle QAC}=\dfrac{1}{2}\times|m+1|\times 4=8$，

解得$m=3$或$m=-5$.

$\therefore$点Q的坐标为$(3,0)$或$(-5,0)$.

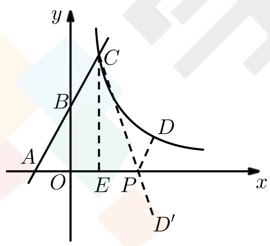
（3）$\because D(4,a)$是反比例函数$y=\dfrac{4}{x}$上一点，

$\therefore a=\dfrac{4}{4}=1$，

$\therefore D(4,1)$，

作点D关于x轴的对称点$D'(4,-1)$，

连接CD'交x轴于点P，



此时$PC+PD$的值最小.

设直线CD'的解析式为$y=ax+b$，

则有$\begin{cases}a+b=4\\4a+b=-1\end{cases}$，

解得$a=-\dfrac{5}{3}$，$b=\dfrac{17}{3}$.

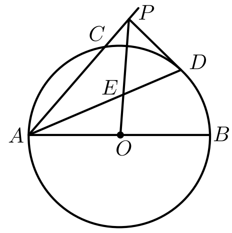
$\therefore$直线CD'的解析式为$y=-\dfrac{5}{3}x+\dfrac{17}{3}$.

$\therefore$直线CD'与x轴的交点为$\left(\dfrac{17}{5},0\right)$.

故点P的坐标为$\left(\dfrac{17}{5},0\right)$时，使得$PC+PD$的值最小.

【踩分点】

20. 如图，AB是$\odot O$的直径，AC是弦，AD是$\angle BAC$的角平分线，交$\odot O$于点D，过点D作直线AC的垂线，垂足为P，连接OP交AD于点E.



（1）求证：DP是$\odot O$的切线.

（2）求证：$PE\cdot DE=OE\cdot AE$.

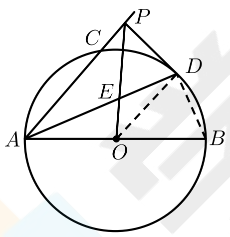
（3）若$\dfrac{AE}{DE}=\dfrac{5}{3}$，$PC=2$，求$AD$的长度.

【答案】（1）证明见解析.

（2）证明见解析.

（3）$2\sqrt{30}$.

【解析】（1）连接OD，BD，



因为OD，OA均为圆O的半径，

所以$OA=OD$，

所以$\angle OAD=\angle ODA$，

因为AD为$\angle BAC$的角平分线，

所以$\angle CAD=\angle DAO$，

所以$\angle CAD=\angle ODA$，

所以$AC//OD$，

因为$DP\perp AP$，

所以$OD\perp DP$，

所以DP为圆O的切线.

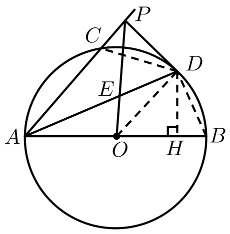
（2）因为$\angle PAE=\angle ODA$，$\angle AEP=\angle OED$，

所以$\triangle AEP\backsim\triangle DEO$，

所以$\dfrac{AE}{DE}=\dfrac{PE}{OE}$，

所以$PE\cdot DE=OE\cdot AE$.

（3）因为$\dfrac{AP}{OD}=\dfrac{AE}{DE}=\dfrac{5}{3}$，作$DH\perp AB$于点$H$，连接$CD$，



因为$\angle CAD=\angle BAD$，所以$\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BD}$，所以$CD=DB$，

因为$\angle CPD=90^\circ$，所以$\triangle CPD$为直角三角形，

又因为$DH\perp AB$，所以$\angle DHB=90^\circ$，

所以$\triangle CPD$为直角三角形，

又因为在$\triangle APD$和$\triangle AHD$中，

$$\begin{cases}\angle APD=\angle AHD\\ \angle PAD=\angle HAD,\\ AD=AD\end{cases}$$

所以$\triangle APD\cong\triangle AHD$，所以$DP=DH$，$AP=AH$，

所以在$\mathrm{Rt}\triangle CPD$和$\mathrm{Rt}\triangle BHD$中，$\begin{cases}DP=DH\\ DC=DB\end{cases}$，

所以$\triangle CPD\cong\triangle BHD$，所以$CP=HB=2$，

设$AD=5x$，则$AH=AP=5x$，则$AB=AH+HB=5x+2$，

又因为$AO=OD=OB$，

由$\dfrac{AP}{OD}=\dfrac{5}{3}$，则$OD=3x$，则$AO=OD=OB=3x$，

所以$AB=AO+OB=6x$，

所以$6x=5x+2$，解得$x=2$，

所以$AP=AH=10$，$BH=2$，则$OH=OB-HB=3x-2=6-2=4$，

又因为$OD=3x=6$，所以$DH^2=OD^2-OH^2=36-16=20$，

所以$AD^2=AH^2+DH^2=100+20=120$，

所以$AD=\sqrt{120}=2\sqrt{30}$，

所以$AD = 2\sqrt{30}$.

【踩分点】

四、填空题

（本大题共5小题，每小题4分，共20分）

21. 设x_1，x_2是方程$x^2 - 3x - 1 = 0$的两实数根，则$x_1^2 + x_2^2 =$ ______ .

【答案】11

【解析】$\because x^2 - 3x - 1 = 0$，

$\therefore x_1 + x_2 = 3$，$x_1 x_2 = -1$，

$\therefore x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$

$= 3^2 - 2 \times (-1)$

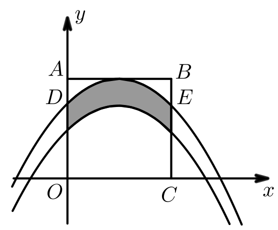
$= 9 + 2$

$= 11$.

故答案为：11.

【踩分点】

22. 如图，抛物线$y = -\dfrac{1}{6}x^2 + x + c$的顶点是正方形$ABCO$的边$AB$的中点，点$A$，$C$在坐标轴上，抛物线分别与$AO$，$BC$交于$D$，$E$两点，将抛物线向下平移1个单位长度得到如图所示的阴影部分．现随机向该正方形区域投掷一枚小针，则针尖落在阴影部分的概率$P =$ ______ .



【答案】$\dfrac{1}{12}$

【解析】记$y = -\dfrac{1}{6}x^2 + x + c$为$y_1 = -\dfrac{1}{6}x^2 + x + c$，

其向下平移1个单位长度后，

所得函数记为$y_2 = -\dfrac{1}{6}x^2 + x + c - 1$，

$\because y_1 = -\dfrac{1}{6}x^2 + x + c = -\dfrac{1}{6}(x-3)^2 + c + \dfrac{3}{2}$，

$\therefore$抛物线$y_1=-\dfrac{1}{6}x^2+x+c$的顶点坐标为$\left(3,c+\dfrac{3}{2}\right)$，

因此$|AB|=2\times3=6$，

$\therefore$正方形的边长为6，其面积为$6^2=36$，

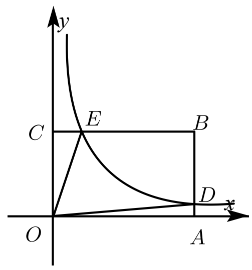
$\therefore$阴影部分的面积为：$S=\int_0^3(y_1-y_2)\mathrm{d}x=\int_0^3 1\mathrm{d}x=x|_0^3=3$，

由几何概型可得，其所求概率为$\dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{12}$，

综上所述，答案为：$\dfrac{1}{12}$.

【踩分点】

23. 如图，在平面直角坐标系中，四边形$OABC$是矩形，点A、C分别在x轴，y轴的正半轴上，反比例函数$y=\dfrac{k}{x}(x>0)$与AB相交于点D，与BC相交于点E，若$BE=4CE$，四边形$ODBE$的面积是12，则$k=$______ .



【答案】3

【解析】设$B(a,b)$，

则$E\left(\dfrac{a}{5},b\right)$，

$\therefore b=\dfrac{\frac{k}{a}}{5}$，

$\therefore k=\dfrac{ab}{5}$，

又$\because$四边形$ODBE$面积为12，

$\therefore 12+S_{\triangle OCE}+S_{\triangle OAD}=S_{\text{矩形}OABC}$，

又$\because S_{\triangle OCE}=S_{\triangle OAD}=\dfrac{k}{2}=\dfrac{ab}{10}$，

$S_{\text{矩形}OABC}=ab$，

$\therefore 12+\dfrac{ab}{10}+\dfrac{ab}{10}=ab$，

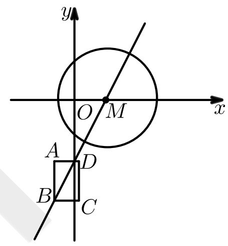
$\therefore ab=15$，

$\therefore k=\dfrac{ab}{5}=3$.

故答案为：3.

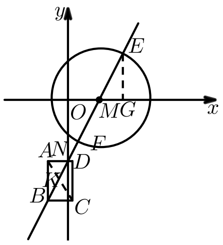
【踩分点】

24. 对一个矩形$ABCD$及$\odot M$给出如下定义：在同一平面内，如果$\odot M$上存在一点，使得这点到矩形$ABCD$的四个顶点的距离相等，那么称矩形$ABCD$是$\odot M$的“相伴矩形”．如图，在平面直角坐标系xOy中，直线$l: y=\sqrt{3}x-6$交x轴于点M，$\odot M$的半径为4，矩形$ABCD$沿直线运动（BD在直线上），$BD=4, AB//y$轴，当矩形$ABCD$是$\odot M$的“相伴矩形”时，点A的坐标为 ______ ．



【答案】$\left(2\sqrt{3}+1, \sqrt{3}\right)$或$\left(2\sqrt{3}-3, -\sqrt{3}\right)$

【解析】设直线$l: y=\sqrt{3}x-6$交y轴于N，则$N(0,-6)$，$M\left(2\sqrt{3}, 0\right)$，



$\therefore ON=6$，$OM=2\sqrt{3}$，

$\therefore \tan\angle OMN=\sqrt{3}$，

$\therefore \angle OMN=60^\circ$，

设直线l交$\odot M$于E、F作$EG\perp x$轴于G，

$\because EM=4$，$\angle EMG=\angle OMN=60^\circ$，

$\therefore GM=2$，$EG=2\sqrt{3}$，

$\therefore E\left(2\sqrt{3}+2, 2\sqrt{3}\right)$，同法可得$F\left(2\sqrt{3}-2, -2\sqrt{3}\right)$，

连接AC交BD于K，易证$\triangle ADK$是边长为2的等边三角形，易知点K向上平移$\sqrt{3}$个单位，再向右平移1个单位得到点A，

根据$\odot M$的“相伴矩形”的定义可知，当矩形$ABCD$的对角线的交点K与E或F重合时，四边形$ABCD$是$\odot M$的“相伴矩形”，

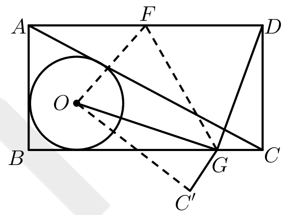
$\because E\left(2\sqrt{3}+2, 2\sqrt{3}\right)$，$F\left(2\sqrt{3}-2, -2\sqrt{3}\right)$，

$\therefore A\left(2\sqrt{3}+1, \sqrt{3}\right)$或$\left(2\sqrt{3}-3, -\sqrt{3}\right)$时，四边形$ABCD$是$\odot M$的“相伴矩形”．

故答案为：$\left(2\sqrt{3}+1,\sqrt{3}\right)$或$\left(2\sqrt{3}-3,-\sqrt{3}\right)$.

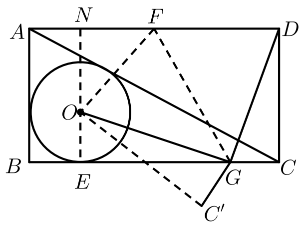
【踩分点】

25. 如图，四边形$ABCD$是矩形，连接AC，$\odot O$是$\triangle ABC$的内切圆，现将矩形$ABCD$按如图所示的方式折叠，使点D与点O重合，折痕为FG，点F、G分别在边AD、BC上，连接OG、DG，若$OG\perp DG$，当$\odot O$的半径长为1时，则$\dfrac{DF}{DC}=$______．



【答案】$\dfrac{5\sqrt{3}-7}{2}$

【解析】如图所示，作$OE\perp BC$于点E，延长EO交AD于点N，



因为$OG\perp DG$，所以$\angle OGE+\angle DGC=90^{\circ}$，

因为$\angle EOG+\angle OGE=90^{\circ}$，$\angle CGD+\angle GDC=90^{\circ}$，

所以$\angle EOG=\angle CGD$，$\angle OGE=\angle GDC$，

根据折叠的性质可得$OG=DG$，在$\triangle EOG$与$\triangle CGD$中，因为$\begin{cases}\angle EOG=\angle CGD\\ OG=DG\\ \angle OGE=\angle GDC\end{cases}$，

所以$\triangle EOG\cong\triangle CGD(\mathrm{ASA})$，

所以$EG=DC=AB$，$GC=OE=1$，

因为$BE=1$，所以$BC=AB+BE+GC=AB+2$，

因为$\odot O$是$\triangle ABC$的内切圆，由直角三角形内切圆的半径公式可得$AB+BC-AC=2$，将$BC=AB+2$代入$AB+BC-AC=2$中可得：$2AB=AC$，所以$\angle ACB=30^{\circ}$，所以$BC=\sqrt{3}AB$，

将$BC=\sqrt{3}AB$代入$BC=AB+2$可得：

$AB=\sqrt{3}+1$，$BC=\sqrt{3}+3$，

因为$AN=1$，所以$ND=\sqrt{3}+2$，

设$FD=x$，则$FN=\sqrt{3}+2-x$，

根据折叠的性质可得$OF=FD=x$，

在$\mathrm{Rt}\triangle NOF$中，

$NO=NE-OE=\sqrt{3}+1-1=\sqrt{3}$，$OF^2=NO^2+NF^2$，

可得$x^2=3+(\sqrt{3}+2-x)^2$，

解得$FD=4-\sqrt{3}$，

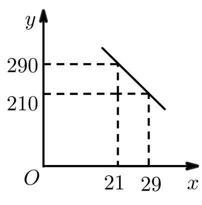
$$\therefore\frac{DF}{DC}=\frac{DF}{AB}=\frac{4-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$$
$$=\frac{(4-\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$
$$=\frac{4\sqrt{3}-4-3+\sqrt{3}}{2}$$
$$=\frac{5\sqrt{3}-7}{2}.$$

【踩分点】

五、解答题

（本大题共3小题，共30分）

26. 一名大学毕业生响应国家“自主创业”的号召，在成都市高新西区租用了一个门店，聘请了2名员工，计划销售一种产品．已知该产品成本价是20元/件，其销售价不低于成本价，且不高于30元/件，员工每人每天的工资为200元．经过市场调查发现，该产品每天的销售量y（件）与销售价x（元/件）之间的函数关系如图所示．



（1） 求y与x之间的函数关系式．

（2） 求每件产品销售价为多少元时，每天门店的纯利润最大？最大纯利润是多少？（纯利润=销售收入−产品成本−员工工资）

【答案】（1）$y=-10x+500(20\leqslant x\leqslant 30)$.

（2） 每件产品销售价为$x=30$元时，每天门店的纯利润最大，最大为1600元．

【解析】（1）设y与x之间的函数关系式为$y=kx+b$，

把$(21,290)$，$(29,210)$代入，

得$\begin{cases}21k+b=290\\29k+b=210\end{cases}$，

解得$\begin{cases}k=-10\\b=50\end{cases}$，

则y与x之间的函数关系式为$y=-10x+500(20\leqslant x\leqslant30)$.

故答案为：$y=-10x+500(20\leqslant x\leqslant30)$.

（2）每天门店的纯利润：

$W=(-10x+500)(x-20)-400$

$=-10x^2+700x-10400$

$=-10(x-35)^2+1850$，

$\because 20\leqslant x\leqslant30$，

$\therefore$当$x=30$时，每天门店的纯利润W最大，最大为1600元.

【踩分点】

27. 请回答下列各题.

（1）如图1，在矩形$ABCD$中，$AB=6$，$BC=8$，点F、E分别为AB、BC上的两点，且$BF=CE=2$，连接EF、DE，判断EF与DE的数量关系及位置关系，并说明理由.

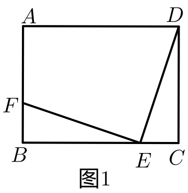


图1

（2）如图2，在平行四边形$ABCD$中，点F、E分别为AB、BC上的两点，且$\angle B=\angle FED=60^\circ$，求证：$\dfrac{FE}{ED}=\dfrac{BE}{DC}$.

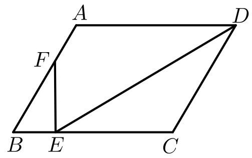


图2

（3）如图3，在矩形$ABCD$中，$AB=6$，$BC=8$，点C关于BD的对称点为点C'，点O为矩形$ABCD$对角线BD的中点，连接OC'交AD于点G，求GD的长.

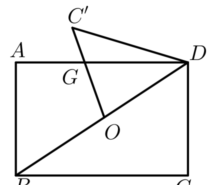


图3

【答案】（1）$EF\perp DE$；证明见解析．

（2）证明见解析．

（3）$\dfrac{200}{39}$．

【解析】（1）$\because$四边形$ABCD$为矩形，

$\therefore \angle C=\angle B=90^\circ$，

$\because AB=6$，$BC=8$，$BF=CE=2$，

$\therefore BE=BC-CE=6=CD$，

在$\triangle BEF$和$\triangle CDE$中，

$\because \begin{cases} BF=CE \\ \angle B=\angle C \\ BE=CD \end{cases}$，

$\therefore \triangle BEF\cong\triangle CDE(\text{SAS})$，

$\therefore EF=DE$，$\angle BEF=\angle CDE$，

$\because \angle CDE+\angle CED=90^\circ$，

$\therefore \angle BEF+\angle CED=90^\circ$，

$\therefore \angle DEF=90^\circ$，

即$EF\perp DE$．

（2）如图2，在AB上取点G，使$BG=BE$，连接EG，

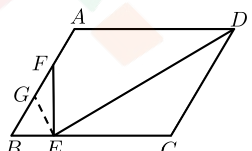


图2

$\because \angle B=60^\circ$，

$\therefore \triangle BEG$为等边三角形，

$\therefore \angle BGE=\angle BEG=60^\circ$，

$\therefore \angle EGF=180^\circ-\angle BGE=120^\circ$，

$\because$四边形$ABCD$为平行四边形，$\angle B=60^\circ$，

$\therefore \angle C = 120^\circ = \angle EGF$，

$\therefore \angle CED + \angle CDE = 60^\circ$，

$\because \angle DEF = 60^\circ$，$\angle BEG = 60^\circ$，

$\therefore \angle GEF + \angle CED = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$，

$\therefore \angle CDE = \angle GEF$，

$\therefore \triangle CDE \backsim \triangle GEF$，

$\therefore \dfrac{EF}{DE} = \dfrac{GE}{CD}$，

又$\because$在等边$\triangle BGE$中$GE = BE$，

$\therefore \dfrac{FE}{ED} = \dfrac{BE}{DC}$．

（3）连接AC，CC'，AC'，

设CC'交BD于点M，

如图3所示，则BD为线段CC'的垂直平分线，

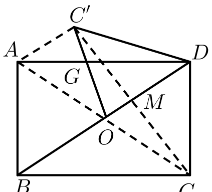


图3

$\because$四边形$ABCD$为矩形，

$\therefore BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = 10$，$OC = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}BD = 5$，$CM = \dfrac{BC \cdot CD}{BD} = \dfrac{24}{5}$

，

$\therefore OM = \sqrt{OC^2 - CM^2} = \dfrac{7}{5}$，

$\because O$为AC的中点，M为CC'的中点，

$\therefore AC' = 2OM = \dfrac{14}{5}$，

又$\because AC' // BD$，

$\therefore \triangle AGC' \backsim \triangle DGO$，

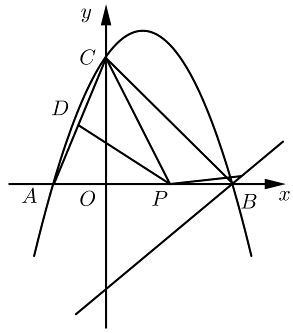
$\therefore \dfrac{AG}{DG} = \dfrac{AC'}{DO} = \dfrac{\frac{14}{5}}{5} = \dfrac{14}{25}$，

又$\because AD = BC = 8$，

$\therefore GD = \dfrac{25}{14 + 25}AD = \dfrac{25}{39} \times 8 = \dfrac{200}{39}$．

【踩分点】

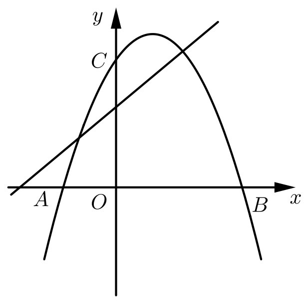
28. 如图，抛物线交x轴于A、B两点，交y轴于点C，直线$l: y=x-3$经过点B，点A的坐标为$A(-1,0)$，且$\triangle ABC$的面积为6.



（1）求该抛物线的解析式.

（2）P为线段AB上的动点，过点P作$PD//BC$，交AC于点D，连接CP，当$\triangle CPD$的面积最大时，求点P的坐标.

（3）在（2）的条件下，将直线l沿y轴上下平移，平移后的直线与该抛物线交于M，N两点，在直线平移过程中，是否存在某一位置使得$\angle MPN$为直角？若存在，请求出此时直线向上（或向下）平移了几个单位；若不存在，请说明理由.



备用图

【答案】（1）$y=-x^2+2x+3$.

（2）$(1,0)$.

（3）存在，向上移动$\dfrac{3+\sqrt{33}}{2}$个单位或向下移动$\dfrac{-3+\sqrt{33}}{2}$个单位.

【解析】（1）$\because$直线$y=x-3$经过点B，且点B在x轴上，

$\therefore B$点的坐标为$(3,0)$

$\because A(-1,0)$，$B(3,0)$，

$\therefore AB=4$，

$\because\triangle ABC$的面积为6，

$\therefore\dfrac{1}{2}\times AB\times OC=6$，

$\therefore OC=3$，

即点C的坐标为$(0,3)$，

设抛物线的解析式为$y=a\times x^2+bx+c(a\neq 0)$，

$\because$抛物线过点$A(-1,0)$、$B(3,0)$、$C(0,3)$，

$\therefore a-b+c=0$，$9a+3b+c=0$，$c=3$，

联立求解得$a=-1$，$b=2$，$c=3$，

故抛物线的解析式为$y=-x^2+2x+3$．

（2）$\because A(-1,0)$，$B(3,0)$，$C(0,3)$，

$\therefore$可以用待定系数法求得直线AC的解析式为$y=3x+3$，

直线BC的解析式为$y=-x+3$，

$\because PD//BC$，设点P为$(m,0)$，

$\therefore$直线PD的解析式为$y=-x+m$，

$\therefore$可联立AC和PD的解析式求得点D的坐标为$\left(\dfrac{m-3}{4},\dfrac{3m+3}{4}\right)$，

$\because AP=m+1$，$BP=3-m$，

$\therefore S_{\triangle PCD}=6-\dfrac{1}{2}\times(m+1)\times\left(\dfrac{3m+3}{4}\right)-\dfrac{1}{2}\times(3-m)$，

要使$\triangle CPD$的面积最大，则$m=1$，

$\therefore P$点的坐标为$(1,0)$．

（3）设平移后的解析式为$y=x-3+t$，

联立$y=x-3+t$与$y=-x^2+2x+3$得

$x-3+t=-x^2+2x+3$，

解得$x=\dfrac{1\pm\sqrt{-4t+25}}{2}$，

当$x=\dfrac{1+\sqrt{-4t+25}}{2}$时，$y=\dfrac{\sqrt{-4t+25}+2t-5}{2}$，

当$x=\dfrac{1-\sqrt{-4t+25}}{2}$时，$y=\dfrac{-\sqrt{-4t+25}+2t-5}{2}$，

设$M\left(\dfrac{1+\sqrt{-4t+25}}{2},\dfrac{\sqrt{-4t+25}+2t-5}{2}\right)$，直线$PM$的解析式为$y=kx+b$，

$\because P(1,0)$，

$\therefore\left(\dfrac{1+\sqrt{4t+25}}{2}\right)\times k+b=\dfrac{\sqrt{-4t+25}+2t-5}{2}$且$k+b=0$，

联立求解得$k=\dfrac{\sqrt{-4t+25}+2t-5}{\sqrt{-4t+25}-1}$，

同理，设PN的解析式为$y=ax+n$，

则$a=\dfrac{-\sqrt{-4t+25}+2t-5}{-\sqrt{-4t+25}-1}$，

$\because\angle MPN$是直角，

$\therefore PM\perp PN$，

$\therefore k_a=-1$，

$\therefore\left(\dfrac{\sqrt{-4t+25}+2t-5}{\sqrt{-4t+25}-1}\right)\times\left(\dfrac{-\sqrt{-4t+25}+2t-5}{-\sqrt{-4t+25}-1}\right)=-1$，

解得$t=\dfrac{3\pm\sqrt{33}}{2}$，

故将l向上移动$\dfrac{3+\sqrt{33}}{2}$个单位或向下移动$\dfrac{-3+\sqrt{33}}{2}$个单位可使得$\angle MPN$为直角.

【踩分点】