成都市2019级高中毕业班摸底测试

数学(理科)参考答案及评分意见

第Ⅰ卷(选择题,共60分)

一、选择题:(每小题5分,共60分)

1. B; 2. C; 3. B; 4. D; 5. A; 6. A; 7. C; 8. B; 9. C; 10. C; 11. A; 12. D.

第Ⅱ卷(非选择题,共90分)

二、填空题:(每小题5分,共20分)

13. $\sqrt{5}$; 14. $\frac{3}{5}$; 15. 0.44; 16. ①④.

三、解答题:(共70分)

17. 解:(Ⅰ)由已知,可得 $f'(x)=x^2+ax-2$. ……1分

∵函数 $f(x)$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线与直线 $2x+y-1=0$ 平行,

∴ $f'(1)=a-1=-2$. ……3分

∴ $a=-1$.

经验证,$a=-1$ 符合题意. ……4分

(Ⅱ)由(Ⅰ)得 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{5}{6}$.

∴ $f'(x)=x^2-x-2=(x+1)(x-2)$. ……5分

当 x 变化时,$f'(x)$ 与 $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	单调递增↗	极大值2	单调递减↘	极小值 $-\frac{5}{2}$	单调递增↗

……10分

∴当 $x=-1$ 时,$f(x)$ 取得极大值2;当 $x=2$ 时,$f(x)$ 取得极小值 $-\frac{5}{2}$. ……12分

18. 解:(Ⅰ)∵第三组的频率为 $1-(0.020+0.025+0.030+0.035+0.050)\times 5=0.200$,

……2分

∴ $a=\frac{0.200}{5}=0.040$. ……3分

又第一组的频率为 $0.025\times 5=0.125$,第二组的频率为 $0.035\times 5=0.175$,

第三组的频率为0.200.

∵前三组的频率之和为 $0.125+0.175+0.200=0.500$, ……4分

∴这300名业主评分的中位数为85. ……5分

(Ⅱ)由频率分布直方图,知评分在[90,95)的人数与评分在[95,100]的人数的比值为3∶2.

∴采用分层抽样法抽取5人,评分在[90,95)的有3人,评分在[95,100]有2人.

……7分

不妨设评分在[90,95)的3人分别为 A_1,A_2,A_3;评分在[95,100]的2人分别为 B_1,B_2.

则从 5 人中任选 2 人的所有可能情况有：

$\{A_1,A_2\}$，$\{A_1,A_3\}$，$\{A_1,B_1\}$，$\{A_1,B_2\}$，$\{A_2,A_3\}$，$\{A_2,B_1\}$，$\{A_2,B_2\}$，$\{A_3,B_1\}$，$\{A_3,B_2\}$，$\{B_1,B_2\}$. 共 10 种. ……10 分

其中选取的 2 人中至少有 1 人的评分在$[95,100]$的情况有：

$\{A_1,B_1\}$，$\{A_1,B_2\}$，$\{A_2,B_1\}$，$\{A_2,B_2\}$，$\{A_3,B_1\}$，$\{A_3,B_2\}$，$\{B_1,B_2\}$.

共 7 种. ……11 分

故这 2 人中至少有 1 人的评分在$[95,100]$的概率为

$P=\dfrac{7}{10}$. ……12 分

19. 解：(Ⅰ)如图，取 PB 中点 H，连接 EH，HC.

在$\triangle PAB$ 中，$\because E$ 为 AP 的中点，H 为 PB 的中点，

$\therefore EH$ 为$\triangle PAB$ 的中位线.

$\therefore EH /\!/ AB$，$EH=\dfrac{1}{2}AB$. ……1 分

又 $DC /\!/ AB$，$DC=\dfrac{1}{2}AB$，

$\therefore EH /\!/ DC$ 且 $EH=DC$.

$\therefore$四边形 $CDEH$ 为平行四边形. $\therefore DE /\!/ CH$. ……3 分

又 $DE\not\subset$平面 PBC，$CH\subset$平面 PBC， ……4 分

$\therefore DE /\!/$平面 PBC. ……5 分

(Ⅱ)如图，连接 BD. $\because DC /\!/ AB$，$BC\perp AB$，$\therefore BC\perp DC$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BCD$ 中，$\because DC=BC=2$，

$\therefore BD=\sqrt{DC^2+BC^2}=2\sqrt{2}$.

在直角梯形 $ABCD$ 中，易得 $AD=2\sqrt{2}$.

在$\triangle ABD$ 中，$\because AD=2\sqrt{2}$，$AB=4$，

$\therefore AD^2+BD^2=AB^2$. $\therefore BD\perp AD$.

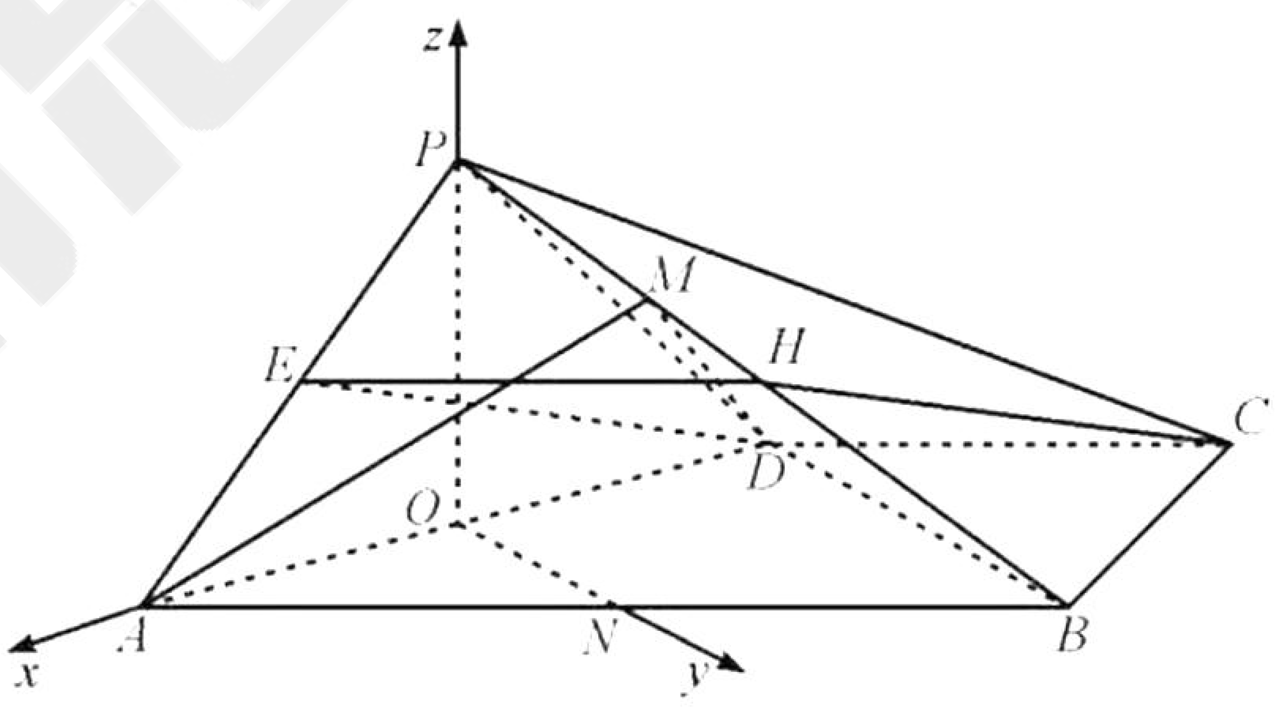
取 AD 中点 O，连接 PO.

$\because PA=PD$，$\therefore PO\perp AD$.

$\because$平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$，

平面 $PAD\cap$平面 $ABCD=AD$，$PO\subset$平面 PAD，

$\therefore PO\perp$平面 $ABCD$.



取 AB 中点 N. $\therefore ON /\!/ BD$，$ON\perp AD$. 则 PO，AD，ON 两两垂直.

以 O 为坐标原点，向量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{ON}$，$\overrightarrow{OP}$的方向分别为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $Oxyz$. ……7 分

则 $A(\sqrt{2},0,0)$，$D(-\sqrt{2},0,0)$，$B(-\sqrt{2},2\sqrt{2},0)$，$P(0,0,\sqrt{2})$，$M(-\dfrac{\sqrt{2}}{3},\dfrac{2\sqrt{2}}{3},\dfrac{2\sqrt{2}}{3})$；

$\overrightarrow{AM}=(-\dfrac{4\sqrt{2}}{3},\dfrac{2\sqrt{2}}{3},\dfrac{2\sqrt{2}}{3})$，$\overrightarrow{DM}=(\dfrac{2\sqrt{2}}{3},\dfrac{2\sqrt{2}}{3},\dfrac{2\sqrt{2}}{3})$.

设平面 ADM 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$.

由$\begin{cases}\overrightarrow{AM}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{DM}\cdot\boldsymbol{m}=0\end{cases}$得$\begin{cases}-2x+y+z=0,\\ x+y+z=0.\end{cases}$ 化简得$\begin{cases}x=0.\\ y=-z.\end{cases}$

令 $z=1$，得 $\boldsymbol{m}=(0,-1,1)$. ……9 分

又平面 ABD 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$. ……10 分

$\because \cos\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\times 1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, ……11 分

$\therefore$二面角 $M-AD-B$ 的余弦值为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. ……12 分

20. 解:(Ⅰ)$\because P$ 在椭圆 C 上,$|PF_1|=2$,$\therefore |PF_2|=2a-2$.

在$\triangle PF_1F_2$ 中,由余弦定理得 $4c^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|\cos\angle F_1PF_2$,

即 $4c^2=4+(2a-2)^2-4(2a-2)\cos\dfrac{\pi}{3}$.

化简,得 $c^2=a^2-3a+3$.…① ……2 分

又椭圆 C 的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$,$\therefore a=2c$.…② ……3 分

由①②,解得 $c=1,a=2$. ……4 分

$\therefore b^2=a^2-c^2=3$.

$\therefore$椭圆 C 的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ……5 分

(Ⅱ)设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.

由$\begin{cases} y=kx+m, \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 消去 y,得$(4k^2+3)x^2+8kmx+4m^2-12=0$. ……6 分

由 $\Delta=16(12k^2-3m^2+9)>0$,$\therefore 4k^2+3>m^2$.

则 $x_1+x_2=\dfrac{-8km}{4k^2+3}$,$x_1x_2=\dfrac{4m^2-12}{4k^2+3}$. ……7 分

$\therefore |AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\dfrac{4\sqrt{12k^2-3m^2+9}}{4k^2+3}$. ……8 分

$\because$坐标原点 O 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$, ……9 分

$\therefore S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}\cdot\sqrt{1+k^2}\cdot\dfrac{4\sqrt{12k^2-3m^2+9}}{4k^2+3}$

$=2\sqrt{3}\cdot\dfrac{|m|\sqrt{4k^2+3-m^2}}{4k^2+3}=2\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{(4k^2+3-m^2)\cdot m^2}}{4k^2+3}$

$\leqslant 2\sqrt{3}\cdot\dfrac{\dfrac{(4k^2+3-m^2)+m^2}{2}}{4k^2+3}=\sqrt{3}$. ……10 分

当且仅当 $4k^2+3-m^2=m^2$,即 $4k^2+3=2m^2$ 时,等号成立. ……11 分

满足 $4k^2+3=2m^2>m^2$.

$\therefore\triangle OAB$ 面积的最大值为$\sqrt{3}$. ……12 分

21. 解:(Ⅰ)函数 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,$f'(x)=\dfrac{2ax-1}{x}$. ……1 分

①当 $a\leqslant 0$ 时,则当 $x\in(0,+\infty)$时,$f'(x)\leqslant 0$ 恒成立.

$\therefore f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,无单调递增区间; ……2 分

②当 $a>0$ 时,则由 $f'(x)=0$ 得 $x=\dfrac{1}{2a}$.

$\therefore$当 $x\in(0,\dfrac{1}{2a})$时,$f'(x)<0$;当 $x\in(\dfrac{1}{2a},+\infty)$时,$f'(x)>0$.

$\therefore f(x)$在$(0,\dfrac{1}{2a})$上单调递减,在$(\dfrac{1}{2a},+\infty)$上单调递增. ……3 分

综上所述,当 $a\leqslant 0$ 时,$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,无单调递增区间;

当 $a>0$ 时，$f(x)$在$(0,\frac{1}{2a})$上单调递减，在$(\frac{1}{2a},+\infty)$上单调递增. ……4 分

(Ⅱ)$f(x)=2ax-\ln x,x>0$.

$\because x_1,x_2(0<x_1<x_2)$满足 $f(x_1)=f(x_2)$,

$\therefore 2ax_1-\ln x_1=2ax_2-\ln x_2$，即$\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=2a$. ……5 分

欲证 $f(2ax_1)+f(2ax_2)>4a^2(x_1+x_2)$，即证 $\ln(2ax_1)+\ln(2ax_2)<0$,

即证 $x_1x_2<\frac{1}{4a^2}$，又 $a>0,0<x_1<x_2$，即证$\sqrt{x_1x_2}<\frac{1}{2a}$.

亦证$\sqrt{x_1x_2}<\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}$，即 $\ln\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1x_2}}>0$,

即证 $2\ln\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}+\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}-\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}>0$. ……7 分

$\because 0<x_1<x_2$，设$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}=t(0<t<1)$，即证 $2\ln t+\frac{1}{t}-t>0$. ……8 分

设 $h(t)=2\ln t+\frac{1}{t}-t(0<t<1)$.

$\because h'(t)=\frac{2}{t}-\frac{1}{t^2}-1=\frac{-(t-1)^2}{t^2}<0$ 在 $t\in(0,1)$上恒成立, ……9 分

$\therefore h(t)$在$(0,1)$上单调递减，$\therefore h(t)>h(1)=0$. ……10 分

$\therefore 2\ln t+\frac{1}{t}-t>0$. ……11 分

即 $f(2ax_1)+f(2ax_2)>4a^2(x_1+x_2)$成立. ……12 分

22. 解:(Ⅰ)由曲线 C 的参数方程，消去参数 α，得曲线 C 的普通方程为

$x^2+y^2=1$. ……2 分

$\because \rho\cos\theta=x,\rho\sin\theta=y$，$\therefore$直线 l 的直角坐标方程为

$\sqrt{3}x-y+\sqrt{3}=0$. ……4 分

(Ⅱ)设曲线 C 上任一点(x,y)经坐标变换后对应的点为(x',y').

据题意，得$\begin{cases}x'=\sqrt{3}x,\\y'=y.\end{cases}$ 即$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}}{3}x',\\y=y'.\end{cases}$

$\because x^2+y^2=1$，$\therefore \frac{x'^2}{3}+y'^2=1$.

即曲线 C_1 的普通方程为$\frac{x^2}{3}+y^2=1$. ……6 分

$\because$直线 l 过定点 $P(-1,0)$,

$\therefore$直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=-1+\frac{1}{2}t,\\y=\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$ (t 为参数). ……7 分

将直线 l 的参数方程代入曲线 C_1 的普通方程，整理可得

$5t^2-2t-4=0$. …(*)

$\Delta=(-2)^2-4\times5\times(-4)=84>0$.

设 t_1,t_2 为方程(*)的两个实数根. 则 $t_1+t_2=\frac{2}{5},t_1t_2=-\frac{4}{5}<0$. ……8 分

$\therefore |PM|+|PN|=|t_1|+|t_2|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\frac{2\sqrt{21}}{5}$. ……10 分