成都市 2019 级高中毕业班摸底测试

数学(文科)参考答案及评分意见

第Ⅰ卷(选择题,共 60 分)

一、选择题:(每小题 5 分,共 60 分)

1. B; 2. C; 3. B; 4. D; 5. A; 6. A; 7. C; 8. B; 9. C; 10. C; 11. A; 12. D.

第Ⅱ卷(非选择题,共 90 分)

二、填空题:(每小题 5 分,共 20 分)

13. $\sqrt{5}$; 14. $\frac{3}{5}$; 15. 0.44; 16. ①④.

三、解答题:(共 70 分)

17. 解:(Ⅰ)由已知,可得 $f'(x)=x^2+ax-2$. ……1 分

∵函数 $f(x)$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线与直线 $2x+y-1=0$ 平行,

∴$f'(1)=a-1=-2$. ……3 分

∴$a=-1$.

经验证,$a=-1$ 符合题意. ……4 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)得 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{5}{6}$.

∴$f'(x)=x^2-x-2=(x+1)(x-2)$. ……5 分

当 x 变化时,$f'(x)$ 与 $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递增↗	极大值 2	单调递减↘	极小值 $-\frac{5}{2}$	单调递增↗

……10 分

∴当 $x=-1$ 时,$f(x)$ 取得极大值 2;当 $x=2$ 时,$f(x)$ 取得极小值 $-\frac{5}{2}$. ……12 分

18. 解:(Ⅰ)∵第三组的频率为 $1-(0.020+0.025+0.030+0.035+0.050)\times 5=0.200$,

……2 分

∴$a=\frac{0.200}{5}=0.040$. ……3 分

又第一组的频率为 $0.025\times 5=0.125$,第二组的频率为 $0.035\times 5=0.175$,

第三组的频率为 0.200.

∵前三组的频率之和为 $0.125+0.175+0.200=0.500$, ……4 分

∴这 300 名业主评分的中位数为 85. ……5 分

(Ⅱ)由频率分布直方图,知评分在[90,95)的人数与评分在[95,100]的人数的比值为 3∶2.

∴采用分层抽样法抽取 5 人,评分在[90,95)的有 3 人,评分在[95,100]有 2 人.

……7 分

不妨设评分在[90,95)的 3 人分别为 A_1,A_2,A_3;评分在[95,100]的 2 人分别为 B_1,B_2.

则从 5 人中任选 2 人的所有可能情况有：

$\{A_1,A_2\}$，$\{A_1,A_3\}$，$\{A_1,B_1\}$，$\{A_1,B_2\}$，$\{A_2,A_3\}$，$\{A_2,B_1\}$，$\{A_2,B_2\}$，$\{A_3,B_1\}$，$\{A_3,B_2\}$，$\{B_1,B_2\}$. 共 10 种. ……10 分

其中选取的 2 人中至少有 1 人的评分在[95,100]的情况有：

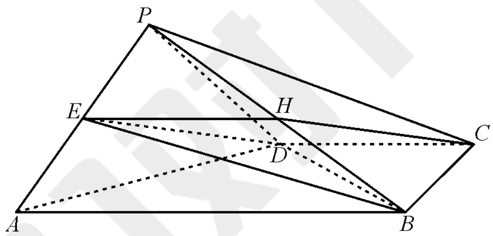
$\{A_1,B_1\}$，$\{A_1,B_2\}$，$\{A_2,B_1\}$，$\{A_2,B_2\}$，$\{A_3,B_1\}$，$\{A_3,B_2\}$，$\{B_1,B_2\}$.

共 7 种. ……11 分

故这 2 人中至少有 1 人的评分在[95,100]的概率为

$P=\frac{7}{10}$. ……12 分

19. 解：(Ⅰ)如图，取 PB 中点 H，连接 EH，HC.



在$\triangle PAB$ 中，$\because E$ 为 AP 的中点，H 为 PB 的中点，

$\therefore EH$ 为$\triangle PAB$ 的中位线.

$\therefore EH /\!/ AB$，$EH=\frac{1}{2}AB$. ……1 分

又 $DC /\!/ AB$，$DC=\frac{1}{2}AB$，

$\therefore EH /\!/ DC$ 且 $EH=DC$.

$\therefore$四边形 $CDEH$ 为平行四边形. $\therefore DE /\!/ CH$. ……3 分

又 $DE\not\subset$平面 PBC，$CH\subset$平面 PBC， ……4 分

$\therefore DE /\!/$平面 PBC. ……5 分

(Ⅱ)$\because DC /\!/ AB$，$BC\perp AB$，$\therefore BC\perp DC$.

在 Rt$\triangle BCD$ 中，$\because DC=BC=2$，$\therefore BD=\sqrt{DC^2+BC^2}=2\sqrt{2}$.

在直角梯形 $ABCD$ 中，易得 $AD=2\sqrt{2}$.

在$\triangle ABD$ 中，$\because AD=2\sqrt{2}$，$AB=4$，$\therefore AD^2+BD^2=AB^2$.

$\therefore BD\perp AD$. ……7 分

$\because$平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$平面 $ABCD=AD$，$BD\perp AD$，$BD\subset$平面 $ABCD$，

$\therefore BD\perp$平面 PAD. ……9 分

在$\triangle PAD$ 中，$\because PA=PD=2$，$AD=2\sqrt{2}$，$\therefore PA^2+PD^2=AD^2$.

$\therefore PA\perp PD$.

$\therefore S_{\triangle PDE}=\frac{1}{2}\times 1\times 2=1$. ……10 分

$\therefore V_{P-BDE}=V_{B-PDE}=\frac{1}{3}S_{\triangle PDE}\cdot BD=\frac{1}{3}\times 1\times 2\sqrt{2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. ……12 分

20. 解：①$\because P$ 在椭圆 C 上，$|PF_1|=2$，$\therefore |PF_2|=2a-2$.

在$\triangle PF_1F_2$ 中，由余弦定理得 $4c^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|\cos\angle F_1PF_2$，

即 $4c^2=4+(2a-2)^2-4(2a-2)\cos\frac{\pi}{3}$.

化简，得 $c^2=a^2-3a+3$. …① ……2 分

又椭圆 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，$\therefore a=2c$. …② ……3 分

由①②，解得 $c=1$，$a=2$. ……4 分

$\therefore b^2=a^2-c^2=3$.

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……5 分

（Ⅱ）由题意，直线 l 的斜率存在且不为 0. 设直线 l 的方程为 $x=my+3$.

由 $\begin{cases} x=my+3, \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 消去 x，得 $(3m^2+4)y^2+18my+15=0$. ……6 分

由 $\Delta=144m^2-240>0$，得 $m^2>\frac{5}{3}$. ……7 分

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$. 则 $y_1+y_2=\frac{-18m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{15}{3m^2+4}$.

$\therefore |AB|=\sqrt{1+m^2}\,|y_1-y_2|=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

$=\frac{4\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{9m^2-15}}{3m^2+4}$. ……8 分

设点 F_2 到直线 l 的距离为 d，又 $F_2(1,0)$，则 $d=\frac{2}{\sqrt{m^2+1}}$.

$\therefore S_{\triangle ABF_2}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{4\sqrt{9m^2-15}}{3m^2+4}$. ……9 分

令 $\sqrt{9m^2-15}=t(t>0)$，则 $m^2=\frac{t^2+15}{9}$.

$\therefore S_{\triangle ABF_2}=\frac{12t}{t^2+27}=\frac{12}{t+\frac{27}{t}}\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}$. ……10 分

当且仅当 $t=3\sqrt{3}$ 时等号成立. 此时 $m^2=\frac{14}{3}>\frac{5}{3}$. ……11 分

$\therefore \triangle ABF_2$ 面积的最大值为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. ……12 分

21. 解：（Ⅰ）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{2ax-1}{x}$. ……1 分

①当 $a\leqslant 0$ 时，则当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)\leqslant 0$ 恒成立.

$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，无单调递增区间； ……2 分

②当 $a>0$ 时，则由 $f'(x)=0$ 得 $x=\frac{1}{2a}$.

$\therefore$ 当 $x\in(0,\frac{1}{2a})$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(\frac{1}{2a},+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

$\therefore f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2a})$ 上单调递减，在 $(\frac{1}{2a},+\infty)$ 上单调递增. ……3 分

综上所述，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，无单调递增区间；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2a})$ 上单调递减，在 $(\frac{1}{2a},+\infty)$ 上单调递增. ……4 分

（Ⅱ）$f(x)=2ax-\ln x$，$f'(x)=2a-\frac{1}{x}(x>0)$.

$\because x_1,x_2(0<x_1<x_2)$ 满足 $f(x_1)=f(x_2)$，

$\therefore 2ax_1-\ln x_1=2ax_2-\ln x_2$，即$\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=2a$. ……5 分

$\therefore f'(x_1)+f'(x_2)=2a-\dfrac{1}{x_1}+2a-\dfrac{1}{x_2}=4a-\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}$.

欲证 $f'(x_1)+f'(x_2)<0$，即证$\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}>4a$，

亦即$\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}>\dfrac{2(\ln x_1-\ln x_2)}{x_1-x_2}$. ……7 分

即证 $2\ln\dfrac{x_1}{x_2}>\dfrac{x_1{}^2-x_2{}^2}{x_1x_2}=\dfrac{x_1}{x_2}-\dfrac{x_2}{x_1}$. ……8 分

$\because 0<x_1<x_2$，设$\dfrac{x_1}{x_2}=t(0<t<1)$，即证 $2\ln t+\dfrac{1}{t}-t>0$. ……9 分

设 $h(t)=2\ln t+\dfrac{1}{t}-t(0<t<1)$.

$\because h'(t)=\dfrac{2}{t}-\dfrac{1}{t^2}-1=\dfrac{-(t-1)^2}{t^2}<0$ 在 $t\in(0,1)$上恒成立， ……10 分

$\therefore h(t)$在$(0,1)$上单调递减，$\therefore h(t)>h(1)=0$. ……11 分

$\therefore 2\ln t+\dfrac{1}{t}-t>0$.

即 $f'(x_1)+f'(x_2)<0$ 成立. ……12 分

22. 解：(Ⅰ)由曲线 C 的参数方程，消去参数 α，得曲线 C 的普通方程为

$x^2+y^2=1$. ……2 分

$\because \rho\cos\theta=x,\rho\sin\theta=y$，$\therefore$直线 l 的直角坐标方程为

$\sqrt{3}x-y+\sqrt{3}=0$. ……4 分

(Ⅱ)设曲线 C 上任一点(x,y)经坐标变换后对应的点为(x',y').

据题意，得$\begin{cases}x'=\sqrt{3}x,\\ y'=y.\end{cases}$ 即$\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x',\\ y=y'.\end{cases}$

$\because x^2+y^2=1$，$\therefore \dfrac{x'^2}{3}+y'^2=1$.

即曲线 C_1 的普通方程为$\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$. ……6 分

$\because$直线 l 过定点 $P(-1,0)$，

$\therefore$直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=-1+\dfrac{1}{2}t,\\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$ (t 为参数). ……7 分

将直线 l 的参数方程代入曲线 C_1 的普通方程，整理可得

$5t^2-2t-4=0$. …(*)

$\Delta=(-2)^2-4\times5\times(-4)=84>0$.

设 t_1,t_2 为方程(*)的两个实数根. 则 $t_1+t_2=\dfrac{2}{5}$，$t_1t_2=-\dfrac{4}{5}<0$. ……8 分

$\therefore |PM|+|PN|=|t_1|+|t_2|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\dfrac{2\sqrt{21}}{5}$. ……10 分