

2020~2021学年四川成都金牛区成都市第十八中学高二上学期开学考试数学试卷(详解)

一、选择题

(本大题共12小题，每小题5分，共60分)

1. 已知全集 $U = \{x | 1 \leq x \leq 7, x \in \mathbf{Z}\}$ ,  $A = \{2, 4, 5\}$ ,  $B = \{1, 3, 5, 7\}$ , 则 $\complement_U(A \cup B) = ( )$ .

- A.  $\{2, 4\}$                       B.  $\{1, 3, 5, 6, 7\}$                       C.  $\{6\}$                       D.  $\{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$

【答案】C

【解析】 $\because A = \{2, 4, 5\}$ ,  $B = \{1, 3, 5, 7\}$ ,

$$\therefore A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\},$$

$$\because U = \{x | 1 \leq x \leq 7, x \in \mathbf{Z}\},$$

$$\therefore \complement_U(A \cup B) = \{6\}.$$

故选择C.

2. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q = 2$ , 前 $n$ 项和为 $S_n$ , 则 $\frac{S_4}{a_2} = ( )$ .

- A. 2                      B. 4                      C.  $\frac{15}{2}$                       D.  $\frac{17}{2}$

【答案】C

【解析】方法一： $\because q = 2$ ,

$$\therefore S_4 = \frac{a_1(1 - 2^4)}{1 - 2} = 15a_1,$$

$$a_2 = a_1q = 2a_1,$$

$$\therefore \frac{S_4}{a_2} = \frac{15a_1}{2a_1} = \frac{15}{2}.$$

故选C.

$$\text{方法二: } \because q = 2, S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{a_2}{2} + a_2 + 2a_2 + 4a_2,$$

$$\text{可知 } \frac{S_4}{a_2} = \frac{15}{2}.$$

故选C.

3. 函数 $y = \log_2 \frac{2-x}{2+x}$ 的图象 ( ).

A. 关于原点对称

B. 关于直线 $y = -x$ 对称

C. 关于 $y$ 轴对称

D. 关于直线 $y = x$ 对称

【答案】A

【解析】令 $y = \log_2 \frac{2-x}{2+x}$ .

由 $\frac{2-x}{2+x} > 0$ 得 $-2 < x < 2$ .

$\therefore f(-x) = \log_2 \frac{2-(-x)}{2+(-x)} = \log_2 \frac{2+x}{2-x} = \log_2 \left( \frac{2-x}{2+x} \right)^{-1}$

$= -\log_2 \frac{2-x}{2+x} = -f(x)$ .

$\therefore f(x)$ 为 $(-2, 2)$ 上的奇函数.

$\therefore$ 图象关于原点对称.

故选A.

4. 关于直线 $m, n$ 与平面 $\alpha, \beta$ , 有以下四个命题:

①若 $m // \alpha, n // \beta$ 且 $\alpha // \beta$ , 则 $m // n$ ; ②若 $m \perp \alpha, n \perp \beta$ 且 $\alpha \perp \beta$ , 则 $m \perp n$ ;

③若 $m \perp \alpha, n // \beta$ 且 $\alpha // \beta$ , 则 $m \perp n$ ; ④若 $m // \alpha, n \perp \beta$ 且 $\alpha \perp \beta$ , 则 $m // n$ ;

其中真命题的序号是 ( ).

A. ①②

B. ③④

C. ①④

D. ②③

【答案】D

【解析】若 $m // \alpha, n // \beta$ 且 $\alpha // \beta$ , 则 $m, n$ 可能平行也可能异面, 也可能相交, 故①错误;

若 $m \perp \alpha, n \perp \beta$ 且 $\alpha \perp \beta$ , 则 $m, n$ 一定垂直, 故②正确;

若 $m \perp \alpha, n // \beta$ 且 $\alpha // \beta$ , 则 $m, n$ 一定垂直, 故③正确;

若 $m // \alpha, n \perp \beta$ 且 $\alpha \perp \beta$ , 则 $m, n$ 可能相交、平行也可能异面, 故④错误, 故D正确.

故选D.

5. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{1-x}, & x \leq 1 \\ 1 - \log_2 x, & x > 1 \end{cases}$ , 则满足 $f(x) \leq 2$ 的 $x$ 的取值范围是 ( ).

A.  $[-1, 2]$

B.  $[0, 2]$

C.  $[1, +\infty)$

D.  $[0, +\infty)$

【答案】D

【解析】当 $x \leq 1$ 时, 由 $f(x) \leq 2$ , 得 $2^{1-x} \leq 2$ , 即 $1-x \leq 1$ , 解得 $x \geq 0$ ,

$$\therefore 0 \leq x \leq 1;$$

当  $x > 1$  时, 由  $f(x) \leq 2$ , 得  $1 - \log_2 x \leq 2$ , 即  $\log_2 x \geq -1$ , 解得  $x \geq \frac{1}{2}$ ,

$\therefore x > 1$ , 综上所述, 满足  $f(x) \leq 2$  的  $x$  的取值范围是  $[0, +\infty)$ .

故选D.

6. 已知  $|\vec{a}| = 1$ ,  $|\vec{b}| = \sqrt{2}$  且  $\vec{a} \perp (\vec{a} - \vec{b})$ , 则向量  $\vec{a}$  与向量  $\vec{b}$  的夹角是 ( ).

A.  $30^\circ$

B.  $45^\circ$

C.  $90^\circ$

D.  $135^\circ$

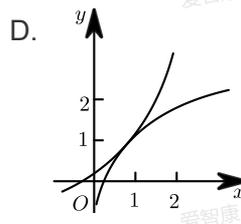
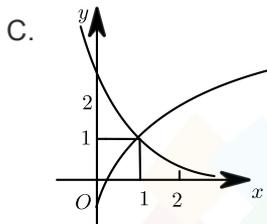
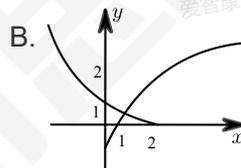
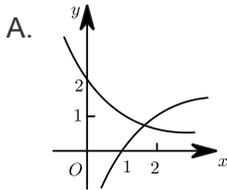
【答案】B

【解析】  $\vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ,

所以  $1 - 1 \times \sqrt{2} \times \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$ , 解得  $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 即  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 45^\circ$ .

故选B.

7. 函数  $f(x) = 1 + \log_2 x$  与  $g(x) = 2^{-x+1}$  在同一直角坐标系下的图象大致是 ( ).



【答案】C

【解析】  $f(x) = 1 + \log_2 x$  的图象是由  $y = \log_2 x$  的图象上移1个单位而得, 其图象必过点  $(1, 1)$ , 故A

、B错误;

$g(x) = 2^{-x+1} = 2^{-(x-1)}$  的图象是由  $y = 2^{-x}$  的图象右移1个单位长度而得, 故其图象也必过

$(1, 1)$  点及  $(0, 2)$  点, 故D错误, C正确.

故选C.

8. 点  $P$  在直线  $x + y - 4 = 0$  上,  $O$  为原点, 则  $|OP|$  的最小值是 ( ).

A. 2

B.  $\sqrt{6}$ C.  $2\sqrt{2}$ D.  $\sqrt{10}$ 

【答案】C

【解析】 $|OP|$ 的最小值，即为原点 $O(0,0)$ 到直线 $x+y-4=0$ 的距离，

$$\text{则}|OP|_{\min} = \frac{|-4|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 2\sqrt{2}.$$

故选C.

9. 已知点 $P(x,y)$ 在不等式组 $\begin{cases} x-2 \leq 0 \\ y-1 \leq 0 \\ x+2y-2 \geq 0 \end{cases}$ 表示的平面区域上运动，则 $z=x-y$ 的取值范围是( ).

A.  $[-2, -1]$ B.  $[-2, 1]$ C.  $[-1, 2]$ D.  $[1, 2]$ 

【答案】C

【解析】令 $z=-2$ ，即 $y=x+2$ ，代入不等式组得：

$$\begin{cases} x \leq 2 \\ x \leq -1 \text{ 无解,} \\ x \geq -\frac{2}{3} \end{cases}$$

∴A, B不对.

令 $z=-1$ 即 $y=x+1$ 代入满足不等式组，

故选：C.

10. 设 $a > 0, b > 0$ ，若 $\sqrt{3}$ 是 $3^a$ 与 $3^b$ 的等比中项，则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值是( ).

A.  $\frac{1}{4}$ 

B. 1

C. 4

D. 8

【答案】C

【解析】根据题意，因 $\sqrt{3}$ 是 $3^a$ 与 $3^b$ 的等比中项，

$$\text{则}(\sqrt{3})^2 = 3^a \cdot 3^b, \text{即}3^1 = 3^{a+b} \Rightarrow a+b=1,$$

又因 $a > 0, b > 0$ ,

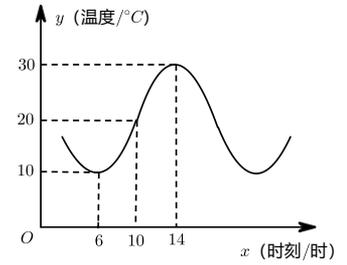
$$\text{则}\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(a+b) = 2 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2 + 2 = 4,$$

当且仅当 $\frac{b}{a} = \frac{a}{b}$ 取等号.

故选C.

11. 如图所示是某市夏季某一天从6时到14时的温度变化曲线，若该曲线近似地满足

$y = A \sin(\omega x + \varphi) + B (A > 0, \omega > 0)$ , 则该市这一天中午12时天气的温度大约是 ( ) .



- A.  $25^\circ$                       B.  $26^\circ$                       C.  $27^\circ$                       D.  $28^\circ$

**【答案】 C**

**【解析】** 由题图知,  $A = 10, B = 20, T = 16$ , 则  $\omega = \frac{\pi}{8}$ . 由题图不妨取  $\frac{\pi}{8} \times 6 + \varphi = -\frac{\pi}{2}$ , 则  $\varphi = -\frac{5\pi}{4}$ , 所以  $y = 10 \sin\left(\frac{\pi}{8}x - \frac{5\pi}{4}\right) + 20$ , 所以  $x = 12$  时,  $y \approx 27$ .  
故选 C.

12. 当  $x \in (1, 2)$  时, 不等式  $(x - 1)^2 < \log_a x$  恒成立, 则  $a$  的取值范围是 ( ) .

- A.  $(0, 1)$                       B.  $(1, 2)$                       C.  $(1, 2]$                       D.  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

**【答案】 C**

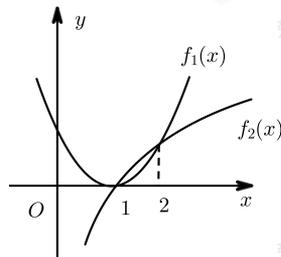
**【解析】** 设  $f_1(x) = (x - 1)^2, f_2(x) = \log_a x$ ,

要使当  $x \in (1, 2)$  时, 不等式  $(x - 1)^2 < \log_a x$  恒成立,

只需  $f_1(x) = (x - 1)^2$  在  $(1, 2)$  上的图象在  $f_2(x) = \log_a x$  的图象的下方即可,

当  $0 < a < 1$  时, 显然不成立,

当  $a > 1$  时, 如图所示, 要使在  $(1, 2)$  上  $f_1(x) = (x - 1)^2$  的图象在  $f_2(x) = \log_a x$  的图象的下方,



只需  $f_1(2) \leq f_2(2)$ , 即  $(2 - 1)^2 \leq \log_a 2, \log_a 2 \geq 1$ ,

$\therefore 1 < a \leq 2$ .

故选: C.

## 二、填空题

(本大题共4小题, 每小题5分, 共20分)

13. 函数  $f(x) = \lg(x-1) + \sqrt{3-x}$  的定义域为 \_\_\_\_\_ .

【答案】  $(1, 3]$

【解析】 求定义域, 则  $\begin{cases} x-1 > 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 1 < x \leq 3$ .

故定义域为  $(1, 3]$ .

【踩分点】

14. 若  $\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = \frac{1}{3}$ , 则  $\cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2\alpha\right) =$  \_\_\_\_\_ .

【答案】  $-\frac{7}{9}$

【解析】 方法一:  $\cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2\alpha\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2\alpha\right)$

$$= -\cos\left[2\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)\right]$$

$$= -\left[1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)\right]$$

$$= -\left(1 - 2 \times \frac{1}{9}\right) = -\frac{7}{9}.$$

方法二:  $\cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2\alpha\right) = \cos\left[\pi - 2\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)\right] = -\cos\left[2\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)\right]$

$$= 2\sin^2\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) - 1 = -\frac{7}{9}.$$

【踩分点】

15. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A$ 、 $B$ 、 $C$  所对的边分别是  $a$ 、 $b$ 、 $c$ , 设  $\vec{m} = (a+b, \sin C)$ ,

$\vec{n} = (\sqrt{3}a + c, \sin B - \sin A)$ , 若  $\vec{m} // \vec{n}$ , 则角  $B =$  \_\_\_\_\_ .

【答案】  $\frac{5\pi}{6}$

【解析】  $\because \vec{m} // \vec{n}$ ,

$$\therefore (a+b)(\sin B - \sin A) = \sin C(\sqrt{3}a + c),$$

由正弦定理知:

$$(a+b)(b-a) = c(\sqrt{3}a + c),$$

$$\text{即 } a^2 + c^2 - b^2 = -\sqrt{3}ac,$$

由余弦定理知:

$$2ac \cos B = -\sqrt{3}ac,$$

$$\cos B = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$B \in (0, \pi),$$

$$\therefore B = \frac{5\pi}{6}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{5\pi}{6}.$$

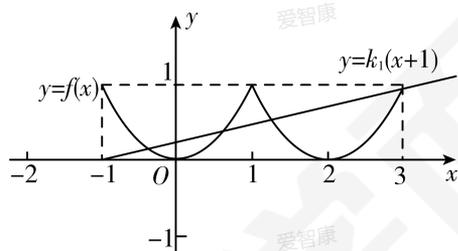
【踩分点】

16. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1) = -f(x)$ , 且 $f(x)$ 是偶函数, 当 $x \in [0, 1]$ 时,  $f(x) = x^2$ . 若在区间 $[-1, 3]$ 上, 函数 $g(x) = f(x) - kx - k$ 有4个零点, 则实数 $k$ 的取值范围为 \_\_\_\_\_.

【答案】  $\left(0, \frac{1}{4}\right]$

【解析】 因为 $f(x+1) = -f(x)$ , 所以 $f(x+2) = -f(x+1) = f(x)$ , 所以 $f(x)$ 的周期为2. 令

$g(x) = 0$ 得 $f(x) = k(x+1)$ . 作出 $y = f(x)$ 在 $[-1, 3]$ 上的图象如图所示.



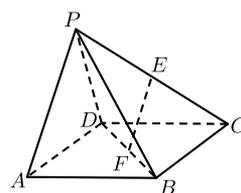
设直线 $y = k_1(x+1)$ 经过点 $(3, 1)$ , 则 $k_1 = \frac{1}{4}$ . 因为直线 $y = k(x+1)$ 经过定点 $(-1, 0)$ , 且直线 $y = k(x+1)$ 与 $y = f(x)$ 的图象有4个交点, 所以 $0 < k \leq \frac{1}{4}$ .

【踩分点】

### 三、解答题

(本大题共6小题, 共70分)

17. 如图所示, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 四边形 $ABCD$ 为矩形,  $\triangle PAD$ 为等腰三角形,  $\angle APD = 90^\circ$ , 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ , 且 $AB = 1$ ,  $AD = 2$ ,  $E, F$ 分别为 $PC, BD$ 的中点.



(1) 证明:  $EF \parallel$  平面  $PAD$ .

爱智康 (2) 证明: 平面  $PDC \perp$  平面  $PAD$ .

(3) 求四棱锥  $P - ABCD$  的体积.

【答案】 (1) 证明见解析.

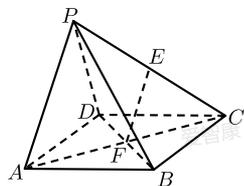
爱智康 (2) 证明见解析. 爱智康

(3)  $\frac{2}{3}$ .

【解析】 (1) 因为四边形  $ABCD$  为矩形,

爱智康  $\therefore E, F$  分别为  $PC, AB$  的中点,

连接  $AC$  交  $BD$  于  $F$ ,



爱智康 因为:  $AC$  与  $BD$  相交且互相平分, 交点为  $F$  点,

爱智康  $\therefore AC$  过点  $F$ , 且  $F$  为  $AC$  的中点,

爱智康  $\therefore E, F$  分别为  $PC, AB$  的中点,

在  $\triangle PAC$  中,  $EF$  为三角形的中位线,

爱智康  $\therefore EF \parallel AC$ ,

爱智康  $\therefore EF \not\subset$  平面  $PAD, AC \subset$  平面  $PAD$ ,

$\therefore EF \parallel$  平面  $PAD$ .

(2) 四边形  $ABCD$  为矩形,

爱智康  $\therefore CD \perp AD$ ,

爱智康  $\therefore$  平面  $PAD \perp$  平面  $ABCD, \text{面 } PAD \cap \text{面 } ABCD = AD, CD \subset \text{面 } ABCD$ ,

$\therefore CD \perp$  平面  $PAD$ ,

爱智康  $\therefore PA \subset$  平面  $PAD$ ,

爱智康  $\therefore CD \perp PA$ ,

又  $\because \angle APD = 90^\circ$ ,

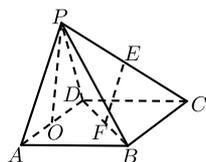
爱智康  $\therefore PA \perp PD, CD \perp PA$  (已证),  $CD \cap PD = D$ ,

爱智康  $\therefore PA \perp$  平面  $PCD, PA \subset$  平面  $PAD$ ,

$\therefore$ 平面 $PAD \perp$ 平面 $PCD$ ,

即: 平面 $PDC \perp$ 平面 $PAD$ .

(3) 过点 $P$ 作 $PO \perp AD$ 于 $O$ ,



因为平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ 及 $\triangle PAD$ 为等腰直角三角形,

所以 $PO \perp$ 面 $ABCD$ ,

即 $PO$ 为四棱锥 $P-ABCD$ 的高,

$\therefore \triangle PAD$ 是等腰直角三角形且 $AD = 2$ ,

$\therefore PO = 1$ ,

$\therefore V_{P-ABCD} = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times 1 \times 2 \times 1 = \frac{2}{3}$ .

**【踩分点】**

18. 已知向量 $\vec{a} = (\sqrt{3} \sin \omega x, -\cos \omega x)$ ,  $\vec{b} = (\cos \omega x, \cos \omega x)$ , 函数 $f(x) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{2}$  ( $\omega > 0$ ) 的最小正周期是 $\pi$ .

(1) 求 $\omega$ 的值及函数 $f(x)$ 的解析式.

(2) 当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, 求函数 $f(x)$ 的值域.

**【答案】** (1)  $\omega = 1$ ,  $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{6})$ .

(2)  $[-\frac{1}{2}, 1]$ .

**【解析】** (1)  $\therefore f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x \cos \omega x - \cos^2 \omega x + \frac{1}{2}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\omega x - \frac{1}{2}(1 + \cos 2\omega x) + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\omega x - \frac{1}{2} \cos 2\omega x = \sin(2\omega x - \frac{\pi}{6}),$$

又 $f(x)$ 的最小正周期为 $\pi$ ,

$\therefore \omega = 1$ ,

$\therefore f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{6})$ .

(2)  $\therefore 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ,

$\therefore -\frac{\pi}{6} \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{5\pi}{6}$ ,

$$\therefore -\frac{1}{2} \leq \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 1,$$

故  $f(x)$  的值域为  $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ .

【踩分点】

19.  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 已知  $2 \cos C(a \cos B + b \cos A) = c$ .

(1) 求角  $C$ .

(2) 若  $c = \sqrt{7}$ ,  $\triangle ABC$  的面积为  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ , 求  $\triangle ABC$  的周长.

【答案】 (1)  $\frac{\pi}{3}$ .

(2)  $5 + \sqrt{7}$ .

【解析】 (1)  $\because 2 \cos C(a \cos B + b \cos A) = c$ ,

$$\therefore 2 \cos C(\sin A \cos B + \sin B \cos A) = \sin C,$$

$$2 \cos C \sin(A + B) = \sin C,$$

$$\therefore A + B + C = \pi,$$

$$\therefore 2 \cos C \sin C = \sin C,$$

$$\therefore \cos C = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle C = \frac{\pi}{3}.$$

$$(2) S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore ab = 6, c = \sqrt{7},$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{2} \Rightarrow a^2 + b^2 = 13,$$

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 25,$$

$$a + b = 5, C_{\triangle ABC} = a + b + c = 5 + \sqrt{7}.$$

【踩分点】

20. 数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n = 2n^2$ ,  $\{b_n\}$  为等比数列, 且  $a_1 = b_1$ ,  $b_2(a_2 - a_1) = b_1$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  的通项公式.

(2) 设  $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ , 求数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项的和.

【答案】 (1)  $a_n = 4n - 2, b_n = \frac{2}{4^{n-1}}$ .

$$(2) T_n = \frac{1}{9}[(6n-5)4^n + 5].$$

【解析】(1)  $\because$  当  $n=1$  时,  $a_1 = S_1 = 2$ ;

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n - S_{n-1} = 2n^2 - 2(n-1)^2 = 4n - 2,$$

又当  $n=1$  时,  $4 \times 1 - 2 = 2 = a_1$  也适合上式,

故  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = 4n - 2$ ,

设  $\{b_n\}$  的公比为  $q$ , 则  $b_1q(a_2 - a_1) = b_1$ ,

$$\therefore q = \frac{1}{4},$$

$$\text{故 } b_n = b_1q^{n-1} = 2 \times \frac{1}{4^{n-1}},$$

即  $\{b_n\}$  的通项公式为  $b_n = \frac{2}{4^{n-1}}$ .

$$(2) \because c_n = \frac{a_n}{b_n} = \frac{4n-2}{\frac{2}{4^{n-1}}} = (2n-1)4^{n-1},$$

$$\therefore T_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$$

$$= 1 + 3 \times 4^1 + 5 \times 4^2 + \cdots + (2n-1)4^{n-1},$$

$$4T_n = 1 \times 4^1 + 3 \times 4^2 + 5 \times 4^3 + \cdots + (2n-3)4^{n-1} + (2n-1)4^n,$$

$$\text{两式相减得 } 3T_n = -1 - 2(4^1 + 4^2 + 4^3 + \cdots + 4^{n-1}) + (2n-1) \times 4^n$$

$$= \frac{1}{3}[(6n-5)4^n + 5],$$

$$\therefore T_n = \frac{1}{9}[(6n-5)4^n + 5].$$

【踩分点】

21. 已知定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x) = x^2 - (3-a)x + 2(1-a)$  (其中  $a \in \mathbf{R}$ ).

(1) 解关于  $x$  的不等式  $f(x) > 0$ .

(2) 若不等式  $f(x) \geq x - 3$  对任意  $x > 2$  恒成立, 求  $a$  的取值范围.

【答案】(1) 当  $a < -1$  时,  $x_1 < x_2$ , 原不等式的解集为  $(-\infty, 2) \cup (1-a, +\infty)$ ,

当  $a = -1$  时,  $x_1 = x_2$ , 原不等式的解集为  $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ ,

当  $a > -1$  时,  $x_1 > x_2$ , 原不等式的解集为  $(-\infty, 1-a) \cup (2, +\infty)$ .

(2)  $a \geq -2$ .

【解析】(1)  $f(x) = (x-2)[x-(1-a)]$ ,

$$\text{而 } x_1 - x_2 = 2 - 1 + a = a + 1,$$

$$f(x) > 0 \text{ 等价于 } (x-2)[x-(1-a)] > 0,$$

于是当  $a < -1$  时,  $x_1 < x_2$ , 原不等式的解集为  $(-\infty, 2) \cup (1-a, +\infty)$ ,

当  $a = -1$  时,  $x_1 = x_2$ , 原不等式的解集为  $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ ,

当  $a > -1$  时,  $x_1 > x_2$ , 原不等式的解集为  $(-\infty, 1-a) \cup (2, +\infty)$ .

(2) 不等式  $f(x) \geq x-3$ ,

$$\text{即 } a \geq -\frac{x^2-4x+5}{x-2} \text{ 恒成立,}$$

$$\text{又当 } x > 2 \text{ 时, } -\frac{x^2-4x+5}{x-2} = -\left(x-2+\frac{1}{x-2}\right) \leq -2 \text{ (当且仅当 } x=3 \text{ 时取“=”}$$

号),

$$\therefore a \geq -2.$$

**【踩分点】**

22. 已知  $\{a_n\}$  是各项不为 0 的等差数列,  $S_n$  为其前  $n$  项和, 且  $a_n^2 = S_{2n-1}$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ .

(1) 求  $a_n$ .

(2) 设数列  $\{b_n\}$  满足  $b_n = \frac{2}{a_n a_{n+1}}$ ,  $T_n$  为数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和.

① 求  $T_n$ .

② 若对任意的  $n \in \mathbf{N}^*$ , 不等式  $\lambda T_n < n + 8 \cdot (-1)^n$  恒成立, 求实数  $\lambda$  的取值范围.

**【答案】** (1)  $a_n = 2n - 1$ .

$$(2) \text{ ① } T_n = \frac{2n}{2n+1}.$$

$$\text{② } \lambda < -\frac{21}{2}.$$

**【解析】** (1) 设公差为  $d$ , 在  $a_n^2 = S_{2n-1}$  中, 令  $n=1$ ,  $n=2$ ,

$$\text{得 } \begin{cases} a_1^2 = S_1 \\ a_2^2 = S_3 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} a_1^2 = a_1 \\ (a_1 + d)^2 = 3a_1 + 3d \end{cases}'$$

$$\text{解得 } a_1 = 1, d = 2,$$

$$\therefore a_n = 2n - 1.$$

$$(2) \text{ ① } \because b_n = \frac{2}{a_n a_{n+1}}$$

$$= \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$= \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1},$$

$$\therefore T_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}.$$

② ①当 $n$ 为偶数时, 要使不等式 $\lambda T_n < n + 8 \cdot (-1)^n$ 恒成立,

即需不等式 $\lambda < \frac{(n+8)(2n+1)}{2n} = n + \frac{4}{n} + \frac{17}{2}$ 恒成立,

$\because n + \frac{4}{n} \geq 4$ , 等号在 $n = 2$ 时取得,

$\therefore$ 此时 $\lambda$ 需满足 $\lambda < \frac{25}{2}$ .

②当 $n$ 为奇数时, 要使不等式 $\lambda T_n < n + 8 \cdot (-1)^n$ 恒成立,

即需不等式 $\lambda < \frac{(n-8)(2n+1)}{2n} = n - \frac{4}{n} - \frac{15}{2}$ 恒成立,

$\because n - \frac{4}{n}$ 是随 $n$ 的增大而增大,

$\therefore n = 1$ 时 $n - \frac{4}{n}$ 取得最小值 $-3$ ,

$\therefore$ 此时 $\lambda$ 需满足 $\lambda < -\frac{21}{2}$ ,

综合①、②可得 $\lambda$ 的取值范围是 $\lambda < -\frac{21}{2}$ .

【踩分点】

# 高二学生专属学习群



群号：674178520

群内不仅有丰富学习资料，还可以和大家一起交流  
欢迎同学扫码加入~~