

2020~2021学年四川成都高新区电子科技大学实验中学高二上学期开学考试数学试卷

一、选择题

(本大题共12小题, 每小题5分, 共60分)

1. 等比数列 $\{a_n\}$ 中,  $a_2 = 4$ ,  $a_4 = 2$ , 则 $a_6 = ( )$ .

- A. -1                      B. 0                      C. 1                      D. -2

2. 对于任意实数 $a, b, c, d$ , 下面命题正确的是 ( ) .

- A. 若 $a > b, c \neq 0$ , 则 $ac > bc$                       B. 若 $a > b$ , 则 $ac^2 > bc^2$   
C. 若 $ac^2 > bc^2$ , 则 $a > b$                       D. 若 $a > b$ , 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

3. 若等差数列 $\{a_n\}$ 各项都是正数,  $a_1 = 3, a_1 + a_2 + a_3 = 21$ , 则 $a_3 + a_4 + a_5 = ( )$ .

- A. 21                      B. 45                      C. 63                      D. 84

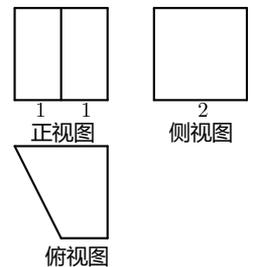
4. 下列函数中, 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是 ( ) .

- A.  $y = x^{\frac{1}{2}}$                       B.  $y = 2^{-x}$                       C.  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$                       D.  $y = \frac{1}{x}$

5. 已知 $a = 0.86^{0.75}, b = 0.86^{0.85}, c = 1.3^{0.86}$ , 则 $a, b, c$ 的大小关系是 ( ) .

- A.  $a > b > c$                       B.  $b > a > c$                       C.  $c > b > a$                       D.  $c > a > b$

6. 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的表面积等于 ( ) .



- A. 10                      B. 13                      C.  $10 + 3\sqrt{2}$                       D.  $16 + 2\sqrt{5}$

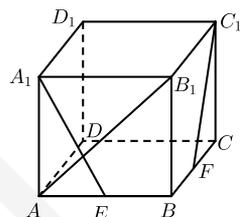
7. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 $A, B, C$ 对应边分别为 $a, b, c$ , 已知三个向量 $\vec{m} = (a, \cos \frac{A}{2}), \vec{n} = (b, \cos \frac{B}{2})$

,  $\vec{p} = \left(c, \cos \frac{C}{2}\right)$  共线, 则  $\triangle ABC$  形状为 ( ).

- A. 等边三角形      B. 等腰三角形      C. 直角三角形      D. 等腰直角三角形

8. 如图, 在正四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $AB = \sqrt{2}AA_1$ ,  $E$ 、 $F$  分别为  $AB$ 、 $BC$  的中点, 异面直线  $AB_1$  与  $C_1F$  所成角的余弦值为  $m$ , 则以下结论正确的是 ( ).

- ①  $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ; ②  $m = \frac{\sqrt{2}}{3}$ ; ③ 直线  $A_1E$  与直线  $C_1F$  相交; ④ 直线  $A_1E$  与直线  $C_1F$  异面.



- A. ①③      B. ②③      C. ②④      D. ①④

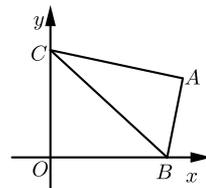
9. 已知  $\frac{3 \sin \alpha + \cos \alpha}{2 \sin \alpha - 3 \cos \alpha} = 7$ , 则函数  $f(x) = \sin^2 x + 2 \tan \alpha |\cos x| - 6$  的最小值为 ( ).

- A. -5      B. -3      C.  $-\sqrt{2}$       D. -1

10. 已知过球面上  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三点的截面和球心  $O$  的距离等于球半径的一半, 且  $AB = BC = CA = 2$ , 则球  $O$  的体积为 ( ).

- A.  $\frac{256\pi}{81}$       B.  $\frac{64\pi}{27}$       C.  $\frac{16\pi}{9}$       D.  $\frac{4\pi}{3}$

11. 如图, 直角  $\triangle ABC$  的斜边  $BC$  长为 2,  $\angle ACB = 30^\circ$ , 且点  $B$ 、 $C$  分别在  $x$  轴、 $y$  轴正半轴上滑动, 点  $A$  在线段  $BC$  的右上方. 设  $\vec{OA} = x\vec{OB} + y\vec{OC}$  ( $x, y \in \mathbf{R}$ ), 记  $M = \vec{OA} \cdot \vec{OC}$ ,  $N = x + y$ , 分别考察  $M$ 、 $N$  的所有运算结果, 则 ( ).



- A.  $M$  有最小值,  $N$  有最大值      B.  $M$  有最大值,  $N$  有最小值  
C.  $M$  有最大值,  $N$  有最大值      D.  $M$  有最小值,  $N$  有最小值

12. 如图, 已知点  $D$  为  $\triangle ABC$  的边  $BC$  上一点,  $\vec{BD} = 3\vec{DC}$ ,  $E_n (n \in \mathbf{N}_+)$  为边  $AC$  上的一列点, 满足

$\vec{E_n A} = \frac{1}{4} a_{n+1} \vec{E_n B} - (3a_n + 2) \vec{E_n D}$ , 其中实数列  $\{a_n\}$  中  $a_n > 0$ ,  $a_1 = 1$ , 则  $\{a_n\}$  的通项公式为 ( )

) .

A.  $2 \cdot 3^{n-1} - 1$

B.  $2^n - 1$

C.  $3^n - 2$

D.  $3 \cdot 2^{n-1} - 2$

## 二、填空题

(本大题共4小题, 每小题5分, 共20分)

13. 已知  $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$ , 且  $\alpha$  为第三象限的角, 则  $\tan \alpha =$  \_\_\_\_\_ .

14. 已知  $x > 0, y > 0$ , 且  $x + 2y = 2$ , 那么  $xy$  的最大值是 \_\_\_\_\_ .

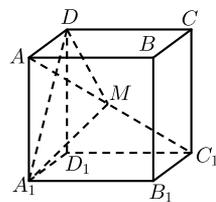
15. 《数书九章》是中国南宋时期杰出数学家秦九韶的著作. 其中在卷五“三斜求积”中提出了已知三角形三边  $a, b, c$ , 求面积的公式, 这与古希腊的海伦公式完全等价, 其求法是“以小斜冥并大斜冥减中斜冥, 余半之, 自乘于上, 以小斜冥乘大斜冥减上, 余四约之, 为实. 一为从隅, 开平方得积.”若把以上这段话文字写出公式, 即若  $a > b > c$ , 则  $S = \sqrt{\frac{1}{4} \left[ c^2 a^2 - \left( \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2} \right)^2 \right]}$ , 现有周长为  $10 + 2\sqrt{7}$  的  $\triangle ABC$  满足  $\sin A : \sin B : \sin C = 2 : 3 : \sqrt{7}$ , 则用以上给出的公式求得  $\triangle ABC$  的面积为 \_\_\_\_\_ .

16. 在棱长为1的正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, 点  $M$  是对角线  $AC_1$  上的动点 (点  $M$  与点  $A$  和点  $C_1$  不重合), 则下列结论正确的是 \_\_\_\_\_ .

① 存在点  $M$ , 使得  $DM \parallel$  平面  $B_1CD_1$ ;

②  $\triangle A_1DM$  的面积不可能等于  $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ;

③ 若  $S_1, S_2$  分别是  $\triangle A_1DM$  在平面  $A_1B_1C_1D_1$  与平面  $BB_1C_1C$  的正投影的面积, 则存在点  $M$ , 使得  $S_1 = S_2$ .



## 三、解答题

(本大题共6小题, 共70分)

17. 请从下面两个条件中任选一个, 补充在下面的问题中, 并解决该问题: ①  $b^2 + c^2 = 52$ ; ②  $\triangle ABC$  的面积为  $3\sqrt{15}$ , 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ . 在已知  $b - c = 2, A$  为钝角,  $\sin A = \frac{\sqrt{15}}{4}$ .

(1) 求边 $a$ 的长.

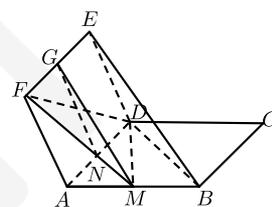
(2) 求 $\sin\left(2C - \frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

18. 已知关于 $x$ 的不等式 $-x^2 + ax + b > 0$ .

(1) 若该不等式的解集为 $(-4, 2)$ , 求 $a, b$ 的值.

(2) 若 $b = a + 1$ , 求此不等式的解集.

19. 如图,  $ABCD$ 与 $ADEF$ 为平行四边形,  $M, N, G$ 分别是 $AB, AD, EF$ 的中点. 求证:



(1)  $BE \parallel$ 平面 $DMF$ ;

(2) 平面 $BDE \parallel$ 平面 $MNG$ .

20. 已知正项等差数列 $\{a_n\}$ 中,  $a_1 = 2$ , 且 $a_1, a_2 - 1, a_3$ 成等比数列, 数列 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$ .  $b_1 = \frac{1}{2}$ ,  $2S_{n+1} = 2S_n + b_n$ .

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 若 $c_n = b_n + \frac{1}{a_n a_{n+1}}$ , 求数列 $\{c_n\}$ 的前 $n$ 项和 $T_n$ 的取值范围.

21. 已知函数 $f(x) = \cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) + 1 - 2\sin^2 x$ ,  $x \in (0, \pi)$ .

(1) 求 $f(x)$ 的单调递增区间.

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 $A, B, C$ 的对边分别为 $a, b, c$ , 已知 $f(A) = \frac{1}{2}$ ,  $b, a, c$ 成等差数列, 且 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 9$ , 求边 $a$ 的值.

22. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$ ,  $a_1 = 1$ , 且 $S_3 = 3S_2 + 1$ .

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 为递增数列, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{2n-1}{3a_n}$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ), 求数列 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和 $T_n$ .

(3) 在条件(2)下, 若不等式 $2\lambda n T_n - \frac{\lambda n}{3a_n} - 2n\lambda + b_n < 0$ 对任意正整数 $n$ 都成立, 求 $\lambda$ 的取值范围.

# 高二学生专属学习群



群号：674178520

群内不仅有丰富学习资料，还可以和大家一起交流  
欢迎同学扫码加入~~