2020~2021学年四川成都高新区电子科技大学实验中学高二上学期开学考试数学试卷(详解)

一、选择题

（本大题共12小题，每小题5分，共60分）

1. 等比数列$\{a_n\}$中，$a_2=4$，$a_4=2$，则$a_6=$（　）．

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. -2

【答案】C

【解析】$\because\{a_n\}$为等比数列，$a_2=4$，$a_4=2$，

$\therefore q^2=\dfrac{a_4}{a_2}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore a_6=a_4\cdot q^2=2\times\dfrac{1}{2}=1$，

故选项C正确．

2. 对于任意实数a，b，c，d,下面命题正确的是（ ）．

A. 若$a>b$，$c\neq 0$，则$ac>bc$　　B. 若$a>b$，则$ac^2>bc^2$

C. 若$ac^2>bc^2$，则$a>b$　　D. 若$a>b$，则$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$

【答案】C

【解析】若$a>b$，$c\neq 0$，取$c<0$，则$ac<bc$，故A错误;

若$a>b$，$c=0$，$ac^2=bc^2$，故B错误;

$ac^2>bc^2$，则$c^2>0$，所以$a>b$，故C正确;

若$a>b$，取$a=1$，$b=-1$，则$\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$，D错误．

故选C．

3. 若等差数列$\{a_n\}$各项都是正数，$a_1=3$，$a_1+a_2+a_3=21$，则$a_3+a_4+a_5=$（　）．

A. 21　　B. 45　　C. 63　　D. 84

【答案】B

【解析】$\because\{a_n\}$为等差数列，且$d>0$，$a_1=3$，

$\therefore a_1+a_2+a_3=3a_1+3d=21$，

$\therefore d=4$，

又$a_3+a_4+a_5=a_1+a_2+a_3+6d=45$.

故选B.

4. 下列函数中，在区间$(0,+\infty)$上单调递增的是（ ）.

A. $y=x^{\frac{1}{2}}$　　B. $y=2^{-x}$　　C. $y=\log_{\frac{1}{2}}x$　　D. $y=\dfrac{1}{x}$

【答案】A

【解析】A 选项：$y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$，定义域为$[0,+\infty)$，且单调递增，A正确；

B 选项：$y=2^{-x}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$，$0<\dfrac{1}{2}<1$，由指数函数的性质知，$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$在$\mathbf{R}$上单减；

C 选项：由对数函数的性质知，$y=\log_{\frac{1}{2}}x$在$(0,+\infty)$上单减；

D 选项：$y=\dfrac{1}{x}$在$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$上单调递减.

故选 A .

5. 已知$a=0.86^{0.75}$，$b=0.86^{0.85}$，$c=1.3^{0.86}$，则a，b，c的大小关系是（ ）.

A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$　　C. $c>b>a$　　D. $c>a>b$

【答案】D

【解析】$\because a=0.86^{0.75}$，$b=0.86^{0.85}$，

且在指数函数$y=0.86^x$中，函数单减，

$\therefore a>b$，且$a<0.86^0=1$，

$\therefore 1>a>b$，

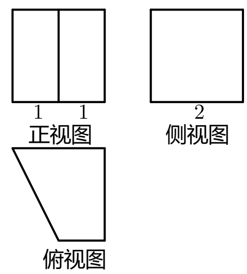
又$\because c=1.3^{0.86}$，且在指数函数中$y=1.3^x$单增，

$\therefore c=1.3^{0.86}>1.3^0=1$，

故$c>1>a>b$.

故选D.

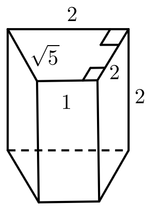
6. 某几何体的三视图如图所示，则该几何体的表面积等于（ ）.



A. 10　　B. 13　　C. $10+3\sqrt{2}$　　D. $16+2\sqrt{5}$

【答案】D

【解析】由三视图可知几何体，如图：



$$S_{表}=2\times\left[(1+2)\times2\times\frac{1}{2}\right]+1\times2+2\times2\times3+\sqrt{5}\times2=16+2\sqrt{5}.$$

故选D．

7. 在$\triangle ABC$中，角A，B，C对应边分别为a，b，c，已知三个向量$\overrightarrow{m}=\left(a,\cos\dfrac{A}{2}\right)$，$\overrightarrow{n}=\left(b,\cos\dfrac{B}{2}\right)$，$\overrightarrow{p}=\left(c,\cos\dfrac{C}{2}\right)$共线，则$\triangle ABC$形状为（　）．

A. 等边三角形　　B. 等腰三角形　　C. 直角三角形　　D. 等腰直角三角形

【答案】A

【解析】$\because$向量$\overrightarrow{m}=\left(a,\cos\dfrac{A}{2}\right)$，$\overrightarrow{n}=\left(b,\cos\dfrac{B}{2}\right)$共线，

$\therefore a\cos\dfrac{B}{2}=b\cos\dfrac{A}{2}$．

由正弦定理得：$\sin A\cos\dfrac{B}{2}=\sin B\cos\dfrac{A}{2}$，

$\therefore 2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}=2\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{A}{2}$，

则$\sin\dfrac{A}{2}=\sin\dfrac{B}{2}$，

$\because 0<\dfrac{A}{2}<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\dfrac{B}{2}<\dfrac{\pi}{2}$，

$\therefore\dfrac{A}{2}=\dfrac{B}{2}$，即$A=B$，

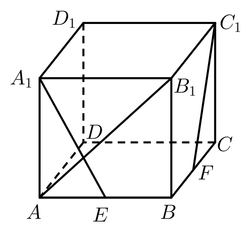
同理可得$B=C$，

$\therefore\triangle ABC$形状为等边三角形．

故选：A．

8. 如图，在正四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=\sqrt{2}AA_1$，E、F分别为AB、BC的中点，异面直线AB_1与C_1F所成角的余弦值为m，则以下结论正确的是（ ）．

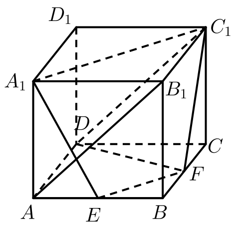
①$m=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$；②$m=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$；③直线A_1E与直线C_1F相交；④直线A_1E与直线C_1F异面．



A. ①③　　B. ②③　　C. ②④　　D. ①④

【答案】B

【解析】



如图，连接EF，A_1C_1，C_1D，DF，

$\because E$，F分别为AB，BC的中点，

$\therefore EF//AC$，

根据长方体性质可得$AC//A_1C_1$，

$\therefore EF//A_1C_1$，

$\therefore$直线A_1E与直线C_1F共面，

又$\because$直线A_1E与直线C_1F不平行，

$\therefore$直线A_1E与直线C_1F相交，

故③正确，④错误，

根据长方体性质可得$AB_1//C_1D$，

$\therefore \angle DC_1F$为异面直线AB_1与C_1F所成的角，

设$AA_1=\sqrt{2}x$，则$AB=\sqrt{2}AA_1=2x$，

又$\because$底面$ABCD$为正方形，

$\therefore CD=BC=AB=2x$，$CF=\dfrac{1}{2}BC=x$，

在直角三角形CDF中，$DF=\sqrt{CF^2+CD^2}=\sqrt{5}x$，

在直角三角形CC_1F中，$C_1F=\sqrt{{CC_1}^2+CF^2}=\sqrt{3}x$，

在直角三角形CC_1D中，$C_1D=\sqrt{{CC_1}^2+CD^2}=\sqrt{6}x$，

在$\triangle C_1DF$中，由余弦定理可知，

$$m=\cos\angle DC_1F=\frac{C_1D^2+C_1F^2-DF^2}{2\cdot C_1D\cdot C_1F}$$
$$=\frac{3x^2+6x^2-5x^2}{2\times\sqrt{3}x\times\sqrt{6}x}=\frac{\sqrt{2}}{3},$$

故①错误，②正确．

故选：B．

9. 已知$\dfrac{3\sin\alpha+\cos\alpha}{2\sin\alpha-3\cos\alpha}=7$，则函数$f(x)=\sin^2x+2\tan\alpha|\cos x|-6$的最小值为（　）．

A. -5　　B. -3　　C. $-\sqrt{2}$　　D. -1

【答案】A

【解析】$\dfrac{3\sin\alpha+\cos\alpha}{2\sin\alpha-3\cos\alpha}=\dfrac{3\tan\alpha+1}{2\tan\alpha-3}=7$

$\Rightarrow 3\tan\alpha+1=14\tan\alpha-21\Rightarrow\tan\alpha=2$，

$\therefore f(x)=\sin^2x+2\tan\alpha|\cos x|-6$

$=\sin^2x+4|\cos x|-6$

$=1-\cos^2x+4|\cos x|-6$，

令$t=\cos x$，$t\in[-1,1]$，$|t|\in[0,1]$，

$\therefore f(t)=-t^2+4|t|-5=-(|t|-2)^2-1$，

$\therefore f(t)_{\min}=f(10)=-4-1=-5$．

故选A．

10. 已知过球面上A、B、C三点的截面和球心O的距离等于球半径的一半，且$AB=BC=CA=2$，则球O的体积为（　）．

A. $\dfrac{256\pi}{81}$　　B. $\dfrac{64\pi}{27}$　　C. $\dfrac{16\pi}{9}$　　D. $\dfrac{4\pi}{3}$

【答案】A

【解析】因为$AB=BC=CA=2$，

所以$\triangle ABC$的外接圆半径为$r=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

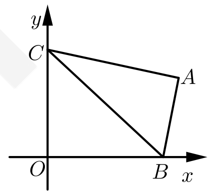
设球半径为R，则$R^2-\left(\frac{1}{2}R\right)^2=\frac{4}{3}$，

所以$R=\frac{4}{3}$，

$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{256\pi}{81}$，

故选：A．

11. 如图，直角$\triangle ABC$的斜边BC长为2，$\angle ACB=30^\circ$，且点B、C分别在x轴、y轴正半轴上滑动，点A在线段BC的右上方．设$\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}$（$x$，$y\in\mathbf{R}$），记$M=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$，$N=x+y$，分别考察$M$、$N$的所有运算结果，则（　）．



A. M有最小值，N有最大值　　B. M有最大值，N有最小值

C. M有最大值，N有最大值　　D. M有最小值，N有最小值

【答案】B

【解析】已知直角坐标下旋转变化公式，

若$A(x_0,y_0)$绕$C(m,n)$逆时针旋转$\alpha\Rightarrow B(x,y)$，

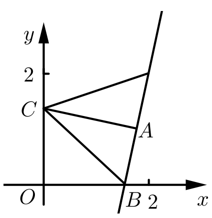
则$x-m=(x_0-m)\cdot\cos\alpha-(y_0-n)\cdot\sin\alpha$，

$y-n=(x_0-m)\cdot\sin\alpha+(y_0-n)\cdot\cos\alpha$，

上述公式可用极坐标+平移变换证明，

下面利用该公式解题，

如图，



设$B(b,0)$，$C(0,c)$，$b>0$，$c>0$，

$\because\triangle ABC$为直角三角形，且斜边$BC=2$，$\angle C=30^\circ$，

$\therefore\angle B=60^\circ$，$AB=1$，

设$C(0,c)$绕$B(b,0)$逆时针旋转$-60^\circ \Rightarrow C'(p,q)$，

则$\begin{cases} p-b=(0-b)\cdot\cos(-60^\circ)-(c-0)\cdot\sin(-60^\circ) \\ q-0=(0-b)\cdot\sin(-60^\circ)+(c-0)\cdot\cos(-60^\circ) \end{cases}$，

解得$\begin{cases} p=\dfrac{1}{2}b+\dfrac{\sqrt{3}}{2}c \\ q=\dfrac{\sqrt{3}}{2}b+\dfrac{1}{2}c \end{cases}$，

$\therefore C'\left(\dfrac{1}{2}b+\dfrac{\sqrt{3}}{2}c,\dfrac{\sqrt{3}}{2}b+\dfrac{1}{2}c\right)$，

由图中几何关系易得A为BC'中点，

结合B，C'坐标及中点公式得$A\left(\dfrac{3}{4}b+\dfrac{\sqrt{3}}{4}c,\dfrac{\sqrt{3}}{4}b+\dfrac{1}{4}c\right)$，

$\because \overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}$，

$\therefore \begin{cases} \dfrac{3}{4}b+\dfrac{\sqrt{3}}{4}c=bx+0 \\ \dfrac{\sqrt{3}}{4}b+\dfrac{1}{4}c=0+cy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\dfrac{c}{b} \\ y=\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\dfrac{b}{c} \end{cases}$，

则$M=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}bc+\dfrac{1}{4}c^2$，

$N=x+y=\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\dfrac{c}{b}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\dfrac{b}{c}=1+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(\dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{c}\right)$，

对M来说，

$\because \angle COB=90^\circ$，且$BC=2$，

则$b^2+c^2=4$，

不妨令$b=2\cos\theta$，$c=2\sin\theta$，$\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

$$
\begin{aligned}
\text{则}M&=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2\cos\theta\cdot 2\sin\theta+\frac{1}{4}\cdot 4\sin^2\theta \\
&=\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta \\
&=\frac{\sqrt{3}}{2}(2\sin\theta\cdot\cos\theta)+\frac{1-\cos 2\theta}{2} \\
&=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta-\frac{1}{2}\cos 2\theta \\
&=\frac{1}{2}+\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right),
\end{aligned}
$$

$\because \theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

$\therefore 2\theta-\dfrac{\pi}{6}\in\left(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5}{6}\pi\right)$，

故$2\theta-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$时，$M_{\max}=\dfrac{3}{2}$，

对N来说，

$N=1+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(\dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{c}\right)$，

$\because \dfrac{b}{c}$，$\dfrac{c}{b}>0$，

由基本不等式得$N \geqslant 1+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{c}}$

$=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$，

综上所述，M有最大值，N有最小值．

故选B．

12. 如图，已知点D为$\triangle ABC$的边BC上一点，$\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{DC}$，$E_n(n\in\mathbf{N}_+)$为边$AC$上的一列点，满足$\overrightarrow{E_nA}=\frac{1}{4}a_{n+1}\overrightarrow{E_nB}-(3a_n+2)\overrightarrow{E_nD}$，其中实数列$\{a_n\}$中$a_n>0$，$a_1=1$，则$\{a_n\}$的通项公式为（ ）．

A. $2\cdot 3^{n-1}-1$　　B. 2^n-1　　C. 3^n-2　　D. $3\cdot 2^{n-1}-2$

【答案】A

【解析】因为$\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{DC}$，

所以$\overrightarrow{E_nC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{E_nB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{E_nD}$，

设$m\overrightarrow{E_nC}=\overrightarrow{E_nA}$，则

因为$\overrightarrow{E_nA}=\frac{1}{4}a_{n+1}\overrightarrow{E_nB}-(3a_n+2)\overrightarrow{E_nD}$，

所以$\frac{1}{3}m=\frac{1}{4}a_{n+1}$，$\frac{2}{3}m=-(3a_n+2)$，

所以$\frac{1}{4}a_{n+1}=-\frac{1}{2}(3a_n+2)$，

所以$a_{n+1}+1=3(a_n+1)$，

因为$a_1+1=2$，

所以$\{a_n+1\}$是以2为首项，3为公比的等比数列，

所以$a_n+1=2\cdot 3^{n-1}$，

所以$a_n=2\cdot 3^{n-1}-1$．

故选：A．

二、填空题

（本大题共4小题，每小题5分，共20分）

13. 已知$\sin\alpha=-\frac{12}{13}$，且$\alpha$为第三象限的角，则$\tan\alpha=$______．

【答案】$\frac{12}{5}$

【解析】$\because\alpha$为第三象限角，

$\therefore \cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\dfrac{5}{13}$,

$\therefore \tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{12}{5}$.

故答案为：$\dfrac{12}{5}$.

【踩分点】

14. 已知$x>0$，$y>0$，且$x+2y=2$，那么xy的最大值是 ______ .

【答案】$\dfrac{1}{2}$

【解析】$\because x>0, y>0$，且$x+2y=2$，

$\therefore xy = \dfrac{1}{2}x\cdot(2y) \leqslant \dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{x+2y}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$，

当且仅当$x=2y$即$x=1$且$y=\dfrac{1}{2}$时，等号成立.

$\therefore xy$的最大值是$\dfrac{1}{2}$.

【踩分点】

15. 《数书九章》是中国南宋时期杰出数学家秦九韶的著作．其中在卷五“三斜求积”中提出了已知三角形三边a，b，c，求面积的公式，这与古希腊的海伦公式完全等价，其求法是“以小斜冥并大斜冥减中斜冥，余半之，自乘于上，以小斜冥乘大斜冥减上，余四约之，为实．一为从隅，开平方得积．”若把以上这段文字写出公式，即若$a>b>c$，则$S=\sqrt{\dfrac{1}{4}\left[c^2a^2-(\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2})^2\right]^2}$，现有周长为$10+2\sqrt{7}$的$\triangle ABC$满足$\sin A:\sin B:\sin C=2:3:\sqrt{7}$，则用以上给出的公式求得$\triangle ABC$的面积为 ______ .

【答案】$6\sqrt{3}$

【解析】$\because \sin A:\sin B:\sin C=2:3:\sqrt{7}$，

$\therefore a:b:c=2:3:\sqrt{7}$，

又$\because\triangle ABC$的周长为$10+2\sqrt{7}$，

$\therefore a=4$，$b=6$，$c=2\sqrt{7}$ ，

$\therefore S=\sqrt{\dfrac{1}{4}\left[c^2a^2-(\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2})^2\right]^2}=6\sqrt{3}$，

即$\triangle ABC$的面积为$6\sqrt{3}$.

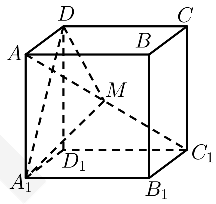
【踩分点】

16. 在棱长为1的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点M是对角线AC_1上的动点（点M与点A和点C_1不重合），则下列结论正确的是 ______ .

①存在点M，使得$DM//$平面B_1CD_1；

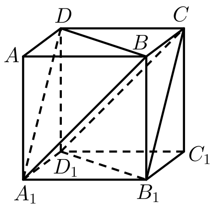
②$\triangle A_1DM$的面积不可能等于$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$；

③若S_1，S_2分别是$\triangle A_1DM$在平面$A_1B_1C_1D_1$与平面BB_1C_1C的正投影的面积，则存在点M，使得$S_1=S_2$.



【答案】①③

【解析】①正确，如图所示作出平面B_1CD_1与平面DBA_1，



$\because BD//B_1D_1$，且$B_1D_1\subset$平面B_1CD_1，

$\therefore BD//$平面B_1CD_1，

又$\because A_1D//B_1C$，且$B_1C\subset$平面B_1CD_1，

$\therefore A_1D//$平面B_1CD_1，

又$\because BD\cap A_1D=D$，

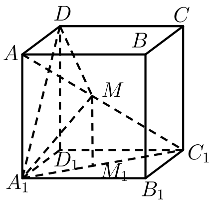
$\therefore$平面$DBA_1//$平面B_1CD_1，

$\because$平面DBA_1与AC_1相交，若交点为M，

则此时$DM\subset$平面DBA_1，

$\therefore$存在$DM//$平面B_1CD_1.

②错误，如图所示作M在平面$A_1B_1C_1D_1$上的投影M_1，



连接A_1C_1，MM_1，设$MM_1=t$，$t\in(0,1)$，

在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，M为体对角线AC_1上的点，

$\therefore DM=A_1M$，且M_1在A_1C_1上，

在$\triangle AA_1C_1$中，$AA_1\perp A_1C_1$，$MM_1\perp A_1C_1$，

$\therefore\triangle AA_1C_1\backsim\triangle MM_1C_1$，

$\therefore\dfrac{MM_1}{AA_1}=\dfrac{A_1C_1-A_1M_1}{A_1C_1}$，

$\therefore A_1M_1=\sqrt{2}-\sqrt{2}t$，

在$\mathrm{Rt}\triangle A_1MM_1$中，

$A_1M=\sqrt{A_1M_1^2+{MM_1}^2}$

$=\sqrt{3t^2-4t+2}$，

在等腰$\triangle MA_1D$中，M到A_1D的距离

$h=\sqrt{(A_1M)^2-\left(\dfrac{1}{2}A_1D\right)^2}=\sqrt{3t^2-4t+\dfrac{3}{2}}$，

$\therefore S_{\triangle A_1DM}=\dfrac{1}{2}\cdot h\cdot A_1D=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3t^2-4t+\dfrac{3}{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3\left(t-\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{1}{6}}$，$t\in(0,1)$，

$\therefore S_{\triangle A_1DM}\geqslant\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，$\triangle A_1DM$面积可能为$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

③正确，由②可知，

$S_1=\dfrac{1}{2}(1-t)$，

$S_2=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\left|t-\dfrac{1}{2}\right|$

$=\left|t-\dfrac{1}{2}\right|$，

当$S_1=S_2$时，$\dfrac{1}{2}(1-t)=\left|t-\dfrac{1}{2}\right|$，

$\therefore t=\dfrac{2}{3}$或0（舍）时，$S_1=S_2$满足.

【踩分点】

三、解答题

（本大题共6小题，共70分）

17. 请从下面两个条件中任选一个，补充在下面的问题中，并解决该问题：①$b^2+c^2=52$；②$\triangle ABC$的面积为$3\sqrt{15}$，在$\triangle ABC$中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c．在已知$b-c=2$，A为钝角，$\sin A=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$．

（1）求边a的长．

（2）求$\sin\left(2C-\dfrac{\pi}{6}\right)$的值．

【答案】（1）$a=8$．

（2）$\dfrac{21\sqrt{5}-17}{64}$．

【解析】（1）$\because b^2+c^2=52$，

又$\because b-c=2$，

$\therefore 2bc=b^2+c^2-(b-c)^2=48$，

$\because A$为钝角，$\sin A=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，

$\therefore \cos A=-\dfrac{1}{4}$，

由余弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$

$=52-48\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)$，

$\therefore a=8$．

（2）由（1），$\begin{cases}b-c=2\\bc=24\end{cases}$，

$\therefore\begin{cases}b=6\\c=4\end{cases}$，

由正弦定理：$\sin C=\dfrac{c\cdot\sin A}{a}=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$，

$\therefore \cos C=\dfrac{7}{8}$，

$\therefore \sin 2C=2\sin C\cdot\cos C=\dfrac{7\sqrt{15}}{32}$，

$\cos 2C=\cos^2 C-\sin^2 C=\dfrac{17}{32}$，

$\therefore \sin\left(2C-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$=\sin 2C\cdot\cos\dfrac{\pi}{6}-\cos 2C\cdot\sin\dfrac{\pi}{6}$

$=\dfrac{21\sqrt{5}-17}{64}$，

若选②，

$\because S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\cdot\sin A=3\sqrt{15}$，

$\therefore bc=24$，

可知，与选①相同．

【踩分点】

18. 已知关于x的不等式$-x^2+ax+b>0$．

（1）若该不等式的解集为$(-4,2)$，求a，b的值．

（2）若$b=a+1$，求此不等式的解集．

【答案】（1）$a=-2$，$b=8$．

（2）当$a=-2$时，此不等式的解集为$\varnothing$，

当$a<-2$时，此不等式的解集为$(a+1,-1)$，

当$a>-2$时，此不等式的解集为$(-1,a+1)$．

【解析】（1）不等式$-x^2+ax+b>0$可化为$x^2-ax-b<0$，

$\because$关于x的不等式$x^2-ax-b<0$的解集为$(-4,2)$，

$\therefore -4$和2是方程$x^2-ax-b=0$的两个根，

$\therefore \begin{cases}-4+2=a\\-4\times 2=-b\end{cases}$，

解得$a=-2$，$b=8$．

（2）当$b=a+1$时，$-x^2+ax+b>0$等价于$x^2-ax-(a+1)<0$，

即$[x-(a+1)](x+1)<0$，

①当$a+1=-1$，即$a=-2$时，原不等式的解集为$\varnothing$，

②当$a+1<-1$，即$a<-2$时，原不等式的解集为$(a+1,-1)$，

③当$a+1>-1$，即$a>-2$时，原不等式的解集为$(-1,a+1)$，

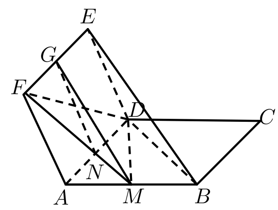
综上所述，当$a=-2$时，此不等式的解集为$\varnothing$，

当$a<-2$时，此不等式的解集为$(a+1,-1)$，

当$a>-2$时，此不等式的解集为$(-1,a+1)$．

【踩分点】

19. 如图，$ABCD$与$ADEF$为平行四边形，M、N、G分别是AB、AD、EF的中点．求证：



（1）$BE//$平面DMF;

（2）平面$BDE//$平面MNG.

【答案】（1）证明见解析.

（2）证明见解析.

【解析】（1）连接AE，交DF于点O，连接OM，易证$OM//BE$，可证$BE//$平面DMF.

（2）$\because MN//BD$，$GN//DE$，且MN、GN交于N点，DE，DB交于D点，

$\therefore$平面$BDE//$平面MNG.

【踩分点】

20. 已知正项等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，且a_1，a_2-1，a_3成等比数列，数列$\{b_n\}$的前n项和为S_n．$b_1=\dfrac{1}{2}$，$2S_{n+1}=2S_n+b_n$.

（1）求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式.

（2）若$c_n=b_n+\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$，求数列$\{c_n\}$的前$n$项和$T_n$的取值范围.

【答案】（1）$a_n=3n-1$，$b_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

（2）$\left[\dfrac{4}{15},\dfrac{5}{6}\right)$.

【解析】（1）$\because\{a_n\}$为正项等差数列，$a_1=2$，且a_1，a_2-1，a_3成等比数列，

$\therefore(a_2-1)^2=a_1\cdot a_3$，

$(2+d-1)^2=2\cdot(2+2d)$，

$d^2-2d-3=0$，

$\therefore d=3$或$d=-1$（舍），

$\therefore a_n=2+3(n-1)=3n-1$，

$\because 2S_{n+1}=2S_n=b_n$，

$\therefore 2S_{n+1}-2S_n=2b_{n+1}=b_n$，

$\therefore\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore\{b_n\}$是首项为$\dfrac{1}{2}$，公比为$\dfrac{1}{2}$的等比数列，

$\therefore b_n=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}$.

（2）$\because c_n=b_n+\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$，

由（1）可知$a_n=3n-1$，$b_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}$，

$\therefore c_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}+\dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)}$

$=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3n-1}-\dfrac{1}{3n+2}\right)$，

$\therefore$

$T_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2}+\cdots+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{8}+\cdots+\dfrac{1}{3n-1}-\dfrac{1}{3n+2}\right)$

$=\dfrac{\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)}{1-\dfrac{1}{2}}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3n+2}\right)$

$=1-\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{3(3n+2)}$

$=\dfrac{5}{6}-\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{9n+6}\right)$，

$\because$当$n=1$时，$\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{9n+6}$有最大值$\dfrac{17}{30}$，

$\therefore$此时T_n有最小值$\dfrac{4}{15}$，

又$\because n$增大$\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{9n+6}>0$恒成立，

$\therefore T_n<\dfrac{5}{6}$，

故：$\{c_n\}$前n项和T_n取值范围为$\left[\dfrac{4}{15},\dfrac{5}{6}\right)$.

【踩分点】

21. 已知函数$f(x)=\cos\left(2x-\dfrac{2\pi}{3}\right)+1-2\sin^2x$，$x\in(0,\pi)$.

（1）求$f(x)$的单调递增区间.

（2）在$\triangle ABC$中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$f(A)=\dfrac{1}{2}$，b，a，c成等差数列，且$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=9$，求边$a$的值.

【答案】（1）$\left[-\dfrac{\pi}{3}+k\pi,\dfrac{\pi}{6}+k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

（2）$a=3$.

【解析】（1）$f(x)=\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)+1-2\sin^2 x$,

$$=-\frac{1}{2}\cdot\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\cos 2x,$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x,$$
$$=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right).$$

由$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$,

$\Rightarrow -\frac{\pi}{3}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$,

$\therefore f(x)$的单调递增区间为：$\left[-\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

（2）$\because f(A)=\frac{1}{2}$,

$\therefore \sin\left(2A+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$,

又$\because A\in(0,\pi)$,

$\therefore 2A+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{13\pi}{6}\right)$,

$\therefore 2A+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$,

$\therefore A=\frac{\pi}{3}$.

又$\because \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=c\cdot b\cdot\cos A=9$,

$\therefore bc=18$.

又$\because 2a=b+c$,

$$\therefore a^2=b^2+c^2-2\cdot bc\cdot\cos A$$
$$=b^2+c^2-bc$$
$$=(b+c)^2-3bc.$$

$\therefore a^2=4a^2-3\times 9$，$\therefore a=3$.

【踩分点】

22. 已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=1$，且$S_3=3S_2+1$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式.

（2）若数列$\{a_n\}$为递增数列，数列$\{b_n\}$满足$b_n=\frac{2n-1}{3a_n}(n\in\mathbf{N}^*)$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$.

（3）在条件（2）下，若不等式$2\lambda nT_n-\frac{\lambda n}{3a_n}-2n\lambda+b_n<0$对任意正整数$n$都成立，求λ的取值范围.

【答案】（1）$a_n=(-1)^{n-1}$或$a_n=3^{n-1}$.

（2）$T_n=1-\frac{n+1}{3^n}$.

（3）$\lambda \in \left(\dfrac{3}{14},+\infty\right)$.

【解析】（1）$\because a_1=1$，$S_3=3S_2+1$，

$\therefore q^2+q+1=3(q+1)+1$，

$\therefore q^2-2q-3=0$，

$\therefore q=-1$或3，

$\therefore a_n=(-1)^{n-1}$或$a_n=3^{n-1}$.

（2）$\because \{a_n\}$为递增数列，

由（1）$a_n=3^{n-1}$，

又$\because b_n=\dfrac{2n-1}{3a_n}=\dfrac{2n-1}{3\cdot 3^{n-1}}=\dfrac{2n-1}{3n}$，

$T_n=\dfrac{1}{3^1}+\dfrac{3}{3^2}+\cdots+\dfrac{2n-1}{3^n}\cdots$①，

$\dfrac{1}{3}\cdot T_n=\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{2}{3^3}+\cdots+\dfrac{2n-3}{3^n}+\dfrac{2n-1}{3^{n+1}}\cdots$②，

①−②得：

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}T_n&=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\cdots+\frac{2}{3^n}-\frac{2n-1}{3^{n+1}}\\&=\frac{1}{3}+\frac{\frac{2}{9}\left(1-\frac{1}{3^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{3}}-\frac{2n-1}{3^{n+1}}\\&=\frac{2}{3}-\frac{2n+2}{3^{n+1}},\end{aligned}$$

$\therefore T_n=1-\dfrac{n+1}{3^n}$.

（3）$\because 2\lambda nT_n-\dfrac{\lambda n}{3a_n}-2n\lambda+b_n<0$，

$\Rightarrow \lambda\left(2nT_n-\dfrac{n}{3a_n}-2n\right)+b_n<0$，

$\Rightarrow \lambda\left(-\dfrac{2n^2+3n}{3^n}\right)<-b_n$，

$\Rightarrow \lambda>\dfrac{2n-1}{2n^2+3n}$恒成立，

令$t=2n-1$（$n\in\mathbf{N}^*$，t为正奇数），

则$\dfrac{2n-1}{2n^2+3n}=\dfrac{2t}{(t+1)(t+4)}=\dfrac{2}{t+\dfrac{4}{t}+5}$，

$\because t=\dfrac{4}{t}\geqslant 4$当且仅当$t=2$时等号成立，

$\therefore t=3$，则$t+\dfrac{4}{t}=\dfrac{13}{3}$，

$t=1$，则$t+\dfrac{4}{t}=5$，

$\therefore t=3$，$n=2$时，$t+\dfrac{4}{t}$有最小值，

此时$\dfrac{2}{t+\dfrac{4}{t}+5}$有最大值$\dfrac{3}{14}$，

$\therefore \dfrac{2n-1}{2n^2+3n}$最大值为$\dfrac{3}{14}$，

$\therefore \lambda > \dfrac{3}{14}$．

【踩分点】