2020~2021学年四川成都高新区成都石室天府中学高二上学期开学考试文科数学试卷(详解)

一、选择题

（本大题共12小题，每小题5分，共60分）

1. 直线$x+y+2=0$的倾斜角为（ ）.

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{3\pi}{4}$　　C. $-\frac{3\pi}{4}$　　D. $-\frac{\pi}{4}$

【答案】B

【解析】由题意得，直线$x+y+2=0$，斜率$k=-1$，

即$\tan\theta=-1\Rightarrow\theta=\frac{3}{4}\pi$.

故选B.

2. 已知等比数列$\{a_n\}$中，$a_3a_{11}=4a_7$，数列$\{b_n\}$是等差数列，且$b_7=a_7$，则$b_5+b_9=$（ ）.

A. 2　　B. 4　　C. 16　　D. 8

【答案】D

【解析】等比数列$\{a_n\}$中，$a_3a_{11}=4a_7$，

可得$a_7^2=4a_7$，

解得$a_7=4$，且$b_7=a_7$，

$\therefore b_7=4$，

数列$\{b_n\}$是等差数列，

则$b_5+b_9=2b_7=8$.

故选：D.

3. 设m，n是两条不同的直线，α，β是两个不同的平面，则下列命题中正确的是（ ）.

A. 若$m//\alpha$，$n\perp\beta$且$\alpha\perp\beta$，则$m\perp n$

B. 若$\alpha\perp\beta$，$m//n$且$n\perp\beta$，则$m//\alpha$

C. 若$m\perp\alpha$，$n\perp\beta$且$m\perp n$，则$\alpha\perp\beta$

D. 若$m\subset\alpha$，$n\subset\beta$且$m//n$，则$\alpha//\beta$

【答案】C

【解析】A 选项：若$m//\alpha$，$n\perp\beta$且$\alpha\perp\beta$，则m，n关系不确定；

B 选项：若$\alpha\perp\beta$，$m//n$且$n\perp\beta$，则有$m//\alpha$或$m\in\alpha$；

C 选项：若$m\perp\alpha$，$n\perp\beta$且$m\perp n$，则必有$\alpha\perp\beta$；

D 选项：若$m\subset\alpha$，$n\subset\beta$且$m//n$，则α和β的关系不确定．

故选 C .

4. 点$(0,-1)$到直线$y=k(x+1)$距离的最大值为（ ）．

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

【答案】B

【解析】点$(0,-1)$到直线$y=k(x+1)$的距离：

$$d=\frac{|1+k|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{\frac{(1+k)^2}{1+k^2}}=\sqrt{1+\frac{2}{k+\frac{1}{k}}}\ (k\neq 0)\ ,$$

①当$k=0$时，$d=1$；

②当$k>0$时，$k+\frac{1}{k}\geqslant 2$，故$\sqrt{1+\frac{2}{k+\frac{1}{k}}}\leqslant\sqrt{2}$，

当且仅当$k=1$时，等号成立；

③当$k<0$时，$k+\frac{1}{k}\leqslant -2$，

故$0\leqslant\sqrt{1+\frac{2}{k+\frac{1}{k}}}<1$，

故当$k=1$时，d取到最大值$\sqrt{2}$．

故选：B．

5. 已知向量$\overrightarrow{a}=(\cos 2\alpha,\sin\alpha)$，$\overrightarrow{b}=(1,2\sin\alpha-1)$，$a\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，若$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\frac{2}{5}$，则$\tan\alpha$的值为（ ）．

A. $\frac{3}{4}$　　B. $-\frac{3}{4}$　　C. $\frac{4}{3}$　　D. $-\frac{4}{3}$

【答案】B

【解析】由题意得$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\cos 2\alpha+\sin\alpha(2\sin\alpha-1)$，

$$\frac{2}{5}=1-2\sin^2\alpha+2\sin^2\alpha-\sin\alpha,$$

$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\left(\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)\right)$，

$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\dfrac{4}{5}$，

$\therefore\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=-\dfrac{3}{4}$．

故选：B．

6. 若正数x，y满足$x+3y=2xy$，则$3x+y$的最小值是（　）．

A. $6\sqrt{3}$　　B. $4\sqrt{3}$　　C. 10　　D. 8

【答案】D

【解析】由正数x，y满足$x+3y=2xy$，

则 $\dfrac{3}{2x}+\dfrac{1}{2y}=1$，

因为$x>0$，$y>0$，

所以$3x+y=(3x+y)\left(\dfrac{3}{2x}+\dfrac{1}{2y}\right)$

$=\dfrac{9}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{3y}{2x}+\dfrac{3x}{2y}\geqslant5+2\sqrt{\dfrac{3y}{2x}\cdot\dfrac{3x}{2y}}$

$=8$，

当且仅当 $\dfrac{3y}{2x}=\dfrac{3x}{2y}$ 时等号成立，

此时$x=2$，$y=2$，满足题意．

故选D．

7. 已知$A(3,1)$，$B(-1,2)$，若$\angle ACB$的角平分线所在直线方程是$y=x+1$，则直线AC的方程为（　）．

A. $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$　　B. $x-2y-1=0$　　C. $y=2x-5$　　D. $2x+y-7=0$

【答案】B

【解析】由题意得：直线$y=x+1$是$\angle ACB$的角平分线，

$\therefore B$关于直线$y=x+1$对称的点D必在AC上，

设$D(x_0,y_0)$，则有$\begin{cases}\dfrac{y_0-2}{x_0+1}\times1=-1\\ \dfrac{y_0+2}{2}=\dfrac{x_0-1}{2}+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0=1\\ y_0=0\end{cases}$，

$\therefore$直线AC：$\dfrac{y-y_0}{y_A-y_0}=\dfrac{x-x_0}{x_A-x_0}$，

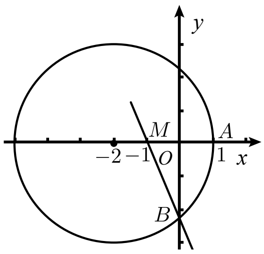
$y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$，即$x-2y-1=0$．故选B．

8. 若过点$M(-1,0)$，且斜率为k的直线与圆$x^2+4x+y^2-5=0$在第四象限内的圆弧有交点，则k的取值范围是（ ）．

A. $0<k<5$ B. $0<k<\sqrt{13}$ C. $-\sqrt{5}<k<0$ D. $0<k<\sqrt{5}$

【答案】C

【解析】由题意得圆$x^2+4x+y^2-5=0$，



$(x+2)^2+y^2=9$，

圆心$(-2,0)$，半径$r=3$，

假设圆与x轴正半轴交点为A，与y轴负半轴交点为B，

则$A(1,0)$，$B(0,-\sqrt{5})$，

$\therefore$直线与圆若在第四象限有交点，

则过M的直线必与圆弧$\overset{\frown}{AB}$相交，

$\therefore k_{MB}<k<0$，

$\dfrac{0+\sqrt{5}}{-1-0}<k<0$，

$-\sqrt{5}<k<0$．

故选C．

9. 《九章算术》之后，人们进一步用等差数列求和公式来解决更多的问题．《张丘建算经》(成书约公元5世纪)卷上二十二“织女问题”：今有女善织，日益功疾．初日织五尺，今一月日织九匹三丈，问日益几何?其意思为：有一个女子很会织布，一天比一天织得快，而且每天比前一天多织相同量的布，已知第一天织5尺，经过一个月(按30天计)后，共织布九匹三丈、问从第2天起，每天比前一天多织布多少尺?(注：1匹$=4$丈,1丈$=10$尺)那么此问题的答案为（ ）．

A. $\frac{1}{2}$尺　　　　B. $\frac{8}{15}$尺　　　　C. $\frac{16}{31}$尺　　　　D. $\frac{16}{29}$尺

【答案】D

【解析】设每天多织布d尺，由题意得$30\times5+\frac{30\times29}{2}d=270$，

得$d=\frac{16}{29}$，

$\therefore$每天多织布$\frac{16}{29}$尺．

故选D．

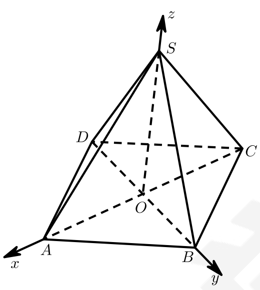
10. 已知正四棱锥$S-ABCD$侧棱长为$\sqrt{2}$，底面边长为$\sqrt{3}$，E是SA的中点，则异面直线BE与SC所成角的大小为（　）．

A. $\frac{\pi}{3}$　　　　B. $\frac{\pi}{6}$　　　　C. $\frac{\pi}{2}$　　　　D. $\frac{\pi}{4}$

【答案】A

【解析】连结AC，BD，交于点O，连结SO，

以O为原点，OA为x轴，OB为y轴，OS为z轴，建立空间直角坐标系，



则$A\left(\frac{\sqrt{6}}{2},0,0\right)$，$B\left(0,\frac{\sqrt{6}}{2},0\right)$，$S\left(0,0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$E\left(\frac{\sqrt{6}}{4},0,\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$，

$\overrightarrow{BE}=\left(\frac{\sqrt{6}}{4},-\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$，$\overrightarrow{SC}=\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，

设异面直线BE与SC所成角的大小为θ，

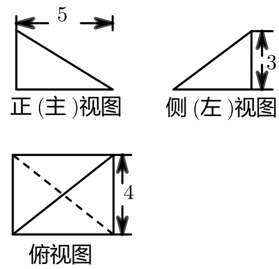
则$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{SC}|}{|\overrightarrow{BE}|\cdot|\overrightarrow{SC}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$．

$\therefore\theta=\frac{\pi}{3}$．

$\therefore$异面直线BE与SC所成角的大小为$\frac{\pi}{3}$．

故选：A．

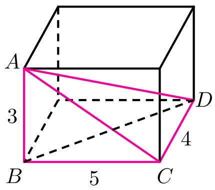
11. 某三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥的外接球表面积为（　）．



A. 50π　　B. 41π　　C. 34π　　D. 32π

【答案】A

【解析】由题意得三棱锥还原如下图：



三棱锥的外接球直径R，

$R^2=5^2+4^2+3^2=50$，

$\therefore S=4\pi\cdot\left(\frac{R}{2}\right)^2=50\pi$，

故选：A．

12. 等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_4=\frac{7}{2}$，且$2\sqrt{S_{n+1}}=\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n+2}}(n\in\mathbf{N}^*)$，直线$\sqrt{S_{n+1}}x+\sqrt{S_n}y=1$与两坐标轴围成的三角形的面积为$T_n$，则$T_1+T_2+T_3+\cdots+T_{2159}$的值为（　）．

A. 1　　B. $\frac{2158}{2160}$　　C. $\frac{2161}{2160}$　　D. $\frac{2159}{2160}$

【答案】D

【解析】由题意得$\{a_n\}$是等差数列，设公差为d，

则$a_4=a_1+3d=\frac{7}{2}$①，

又由$2\sqrt{S_{n+1}}=\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n+2}}$可得$\sqrt{S_n}$也是一个等差数列，

$\because\sqrt{S_n}=\sqrt{na_1+\frac{n(n-1)}{2}d}=\sqrt{\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n}$，

$\therefore a_1=\frac{d}{2}$②，

由①②得$a_1=\frac{1}{2}$，$d=1$，

$\therefore\sqrt{S_{n+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(n+1)$，$\sqrt{S_n}=\frac{\sqrt{2}}{2}n$，

$\sqrt{S_{n+1}}x+\sqrt{S_n}y=1\Rightarrow\frac{x}{\frac{1}{\sqrt{S_{n+1}}}}+\frac{y}{\frac{1}{\sqrt{S_n}}}=1$，

$\therefore T_1=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{S_2}}\times\frac{1}{\sqrt{S_1}}=\frac{1}{1\times2}=1-\frac{1}{2}$，

$T_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{S_3}}\times\frac{1}{\sqrt{S_2}}=\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$，

$\cdots$

$T_n=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{S_{n+1}}}\times\frac{1}{\sqrt{S_n}}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，

$\therefore T_1+T_2+\cdots+T_{2159}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2159}-\frac{1}{2160}=1-\frac{1}{2160}=\frac{2159}{2160}$.

故选：D．

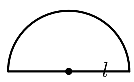
二、填空题

（本大题共4小题，每小题5分，共20分）

13. 若一个圆锥的侧面展开图是面积为$\frac{9}{2}\pi$的半圆面，则该圆锥的底面积为 ______ ．

【答案】$\frac{9\sqrt{3}}{8}\pi$

【解析】由题意得圆锥侧面展开图如下图，



圆锥的母线$l=$该侧面半圆的半径r，

且$\frac{1}{2}\times\pi r^2=\frac{9}{2}\pi\Rightarrow r=3$即$l=3$，

$\therefore$该半圆的弧长：$\frac{1}{2}\times2\pi r=3\pi$，

设圆锥的底面半径为R，则

$2\pi R=3\pi\Rightarrow R=\frac{3}{2}$，

故在圆锥中，高$h=\sqrt{l^2-R^2}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$，

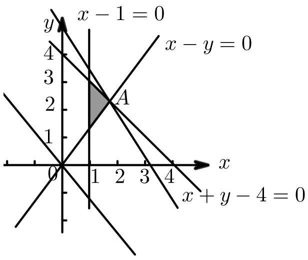
$\therefore$圆锥体积$V=\frac{1}{3}\pi\cdot R^2\cdot h=\frac{1}{3}\pi\times\frac{9}{4}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{8}\pi$.

【踩分点】

14. 若x，y满足约束条件为$\begin{cases}x-1\geqslant0\\x-y\leqslant0\\x+y-4\leqslant0\end{cases}$，则$z=3x+2y$的最大值为 ______ ．

【答案】10

【解析】由题意得根据约束条件画图，



$z=3x+2y\Rightarrow y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{z}{2}$，

可以发现在$x-y=0$与$x+y-4=0$的交点A处取得最大值$\begin{cases}x-y=0\\x+y-4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$，

$\therefore z=3\times2+2\times2=10$．

故答案为：10．

【踩分点】

15. 已知圆$O:x^2+y^2=4$，直线$l:y=x+b$.若圆O上恰有3个点到直线l的距离都等于1，则正数$b=$

__________.

【答案】$\sqrt{2}$

【解析】【命题立意】本题考查直线与圆的位置关系，点到直线的距离公式，难度中等.

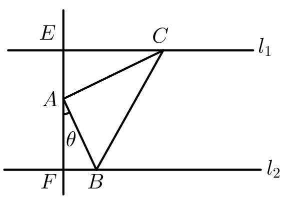
【解题思路】由圆O的方程为$x^2+y^2=4$，可得圆心$O(0，0)$，半径为2，若圆上有三个点到直线$l:y=x+b$的距离为1，则点O到直线的距离为1，而直线l的一般方程为$x-y+b=0$，$\therefore\dfrac{|b|}{\sqrt{2}}=1$，即$b=\pm\sqrt{2}$，又$b$为正数，故$b=\sqrt{2}$.

【踩分点】

16. 已知直线$l_1//l_2$，A是l_1，l_2之间的一定点，并且A点到l_1，l_2的距离分别为1，2，B是直线l_2上一动点，$\angle BAC=90^\circ$，AC与直线l_1交于点C，则$\triangle ABC$面积的最小值为 ______ .

【答案】2

【解析】



过A作l_1,l_2的垂线，分别交l_1、l_2于E、F，

则$AE=1$，$AF=2$，

设$\angle FAB=\theta$，则$\mathrm{Rt}\triangle ABF$中，$AB=\dfrac{2}{\cos\theta}$，

$\mathrm{Rt}\triangle ACE$中，$\angle ACE=\theta$，

可得：$AC=\dfrac{1}{\sin\theta}$，

$\therefore\triangle ABC$面积为$S=\dfrac{1}{2}\times AB\times AC=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{\cos}\times\dfrac{2}{\cos\theta}=\dfrac{2}{\sin 2\theta}$，

$\because\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

$\therefore$当且仅当$\theta=\dfrac{\pi}{2}$时，$\sin 2\theta=1$达到最大值1，

此时$\triangle ABC$面积有最小值2．

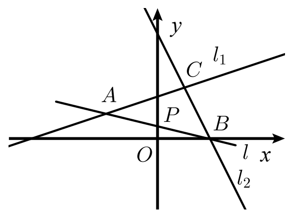
故答案为：2．

【踩分点】

三、解答题

（本大题共6小题，共70分）

17. 如图直线l过点$P(0,1)$，且与直线l_1：$x-3y+10=0$和l_2：$2x+y-8=0$分别相交于A，B两点．



（1） 求过l_1与l_2交点C，且与直线CP垂直的直线方程．

（2） 若线段AB恰被点P平分，求直线l的方程．

【答案】（1）$2x+3y-16=0$．

（2）$x+4y-4=0$．

【解析】（1）$\begin{cases}x-3y+10=0\\2x+y-8=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=4\end{cases}$，

即$C(2,4)$，

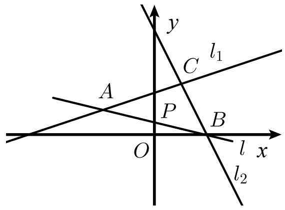
$k_{CP}=\dfrac{4-1}{2-0}=\dfrac{3}{2}$，

与CP垂直的直线斜率为k，

$k\cdot k_{CP}=-1\Rightarrow k=-\dfrac{2}{3}$，

$y-4=-\dfrac{2}{3}(x-2)$，

$2x+3y-16=0$．



（2）$\because AB$恰被P平分，则P是AB中点，

设$A(x_o,y_o)$，则$B(-x_o,2-y_o)$，

A在l_1上，B在l_2上，

$\begin{cases}x_o-3y_o+10=0\\-2x_o+2-y_o-8=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_o=-4\\y_o=2\end{cases}$，

$\therefore\dfrac{y-y_P}{y_o-y_P}=\dfrac{x-x_P}{x_o-x_P}\Rightarrow\dfrac{y-1}{2-1}=\dfrac{x}{-4}$，

$x+4y-4=0$.

【踩分点】

18. 已知α，β为锐角，$\tan\alpha=\dfrac{4}{3}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

（1）求$\cos 2\alpha$的值.

（2）求$\tan(\alpha-\beta)$的值.

【答案】（1）$-\dfrac{7}{25}$.

（2）$-\dfrac{2}{11}$.

【解析】（1）方法一：$\because\tan\alpha=\dfrac{4}{3}$.

$\therefore\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{4}{3}$.

又$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

$\therefore\sin^2\alpha=\dfrac{16}{25}$，$\cos^2\alpha=\dfrac{9}{25}$.

$\therefore\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=-\dfrac{7}{25}$.

方法二：$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$=\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

$=\dfrac{1-\left(\frac{4}{3}\right)^2}{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=-\dfrac{7}{25}$.

（2）方法一：由（1）得$\cos 2\alpha=-\dfrac{7}{25}$，

α为锐角$\Rightarrow\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\sin 2\alpha>0\Rightarrow\sin 2\alpha=\dfrac{24}{25}$.

$\because\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\alpha$，$\beta$均为锐角，$\therefore\dfrac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi$.

$\therefore \sin(\alpha+\beta)=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

$\therefore \cos(\alpha-\beta)=\cos[2\alpha-(\alpha+\beta)]=\cos 2\alpha\cos(\alpha+\beta)+\sin 2\alpha\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{11\sqrt{5}}{25}$

,

$\sin(\alpha-\beta)=\sin[2\alpha-(\alpha+\beta)]=\sin 2\alpha\cos(\alpha+\beta)-\cos 2\alpha\sin(\alpha+\beta)=-\dfrac{2\sqrt{5}}{25}$,

$\therefore \tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=-\dfrac{2}{11}$.

方法二：$\because\alpha$为锐角，

$\cos 2\alpha=-\dfrac{7}{25}$，

$\therefore 2\alpha\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$.

$\therefore \sin 2\alpha=\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}=\dfrac{24}{25}$.

$\therefore \tan 2\alpha=-\dfrac{24}{7}$.

$\because\alpha$，β为锐角，

$\therefore \alpha+\beta\in(0,\pi)$，

又$\because \cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

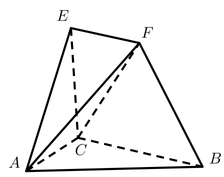
$\therefore \sin(\alpha+\beta)=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

$\therefore \tan(\alpha+\beta)=-2$.

$$\therefore \tan(\alpha-\beta)=\tan[2\alpha-(\alpha+\beta)]$$
$$=\frac{\tan 2\alpha-\tan(\alpha+\beta)}{1+\tan 2\alpha\tan(\alpha+\beta)}$$
$$=\frac{-\frac{24}{7}-(-2)}{1+(-2)\times\left(-\frac{24}{7}\right)}=-\frac{2}{11}.$$

【踩分点】

19. 如图，四边形$ECBF$是直角梯形，$\angle ECB=90^\circ$，$EF//BC$，$EF=2$，$BC=4$，又$AC=2$，$\angle ACB=120^\circ$，$AB\perp EC$，直线AF与直线EC所成的角为60°.



（1） 求证：平面$EAC\perp$平面ABC.

（2） 求三棱锥$E-FAC$的体积.

【答案】（1）证明见解析.

（2） $\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

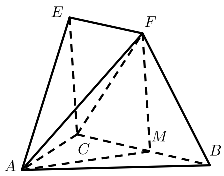
【解析】（1） $\because \angle ECB=90^{\circ}$,

$\therefore EC\perp CB$，又$EC\perp AB$，$CB\cap AB=B$，且CB、$AB\subseteq$面ABC,

$\therefore EC\perp$面ABC，又$EC\subset$面EAC,

$\therefore$面$EAC\perp$面ABC.

（2） 如图所示，取CB中点M，连结FM，AM,



$\because EF \underline{\underline{//}} \frac{1}{2}CB$，$CM=\frac{1}{2}CB$，$\angle ECM=90^{\circ}$,

$\therefore$四边形$ECMF$为正方形,

$\therefore V_{E-FAC}=V_{A-FEC}=V_{A-FCM}=V_{F-ACM}$,

$\because EC\perp$面ABC,

$\therefore FM\perp$面ABC,

$\therefore V_{F-ACM}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle ACM}\times FM$
$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\sin 120^{\circ}\times 2$
$=\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

【踩分点】

20. 已知$\odot C: x^2+y^2+Dx+Ey-12=0$关于直线$x+2y-4=0$对称，且圆心在$y$轴上.

（1） 求$\odot C$的标准方程.

（2） 已知动点M在直线$y=10$上，过点M引圆C的两条切线MA、MB，切点分别为A，B，记四边形$MACB$的面积为S，求S的最小值.

【答案】（1） $x^2+(y-2)^2=16$.

（2） $16\sqrt{3}$.

【解析】（1） 由题意得，圆心$C\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$在直线$x+2y-4=0$上,

即$-\frac{D}{2}-E-4=0$,

又因为圆心C在y轴上,

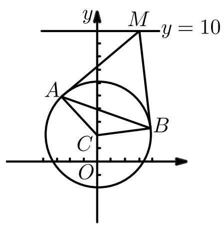
所以$-\dfrac{D}{2}=0$，

由以上两式得：$D=0$，$E=-4$，

所以$x^2+y^2-4y-12=0$，

故$\odot O$的标准方程为$x^2+(y-2)^2=16$．

（2）如图，$\odot O$的圆心为$(0,2)$，半径$r=4$，



因为MA、MB是$\odot C$的两条切线，

所以$CA\perp MA$，$CB\perp MB$，

故$|MA|=|MB|$

$=\sqrt{|MC|^2-r^2}=\sqrt{|MC|^2-4^2}=\sqrt{|MC|^2-16}$，

又因为$S=2S_{\triangle ACM}=4|MA|=4\sqrt{|MC|^2-16}$，

根据平面几何知识，要使S最小，只要$|MC|$最小即可，

易知，当点M坐标为$(0,10)$时，$|MC|_{\min}=8$，

此时$S_{\min}=4\times\sqrt{64-16}=16\sqrt{3}$．

【踩分点】

21. 在$\triangle ABC$中，$a\sin\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{b+c}{2}$，且$BC$边上的中线长为$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$，$AB=3$．

（1）证明：角B，A，C成等差数列．

（2）求$\triangle ABC$的面积．

【答案】（1）证明见解析．

（2）$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$．

【解析】（1）$a\sin\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{b+c}{2}$，

$a\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin B+\dfrac{1}{2}\cos B\right)=\dfrac{b+c}{2}$，

$\sqrt{3}a\cos B+a\cos B=b+c$，

$\sqrt{3}\sin A\sin B+\sin A\cos B=\sin B+\sin C$，

$\sqrt{3}\sin A\sin B+\sin A\cos B=\sin B+\sin(A+B)$,

$\sqrt{3}\sin A\sin B+\sin A\cos B=\sin B+\sin A\cos B+\cos A\sin B$,

$\because B\in(0,\pi)$,

$\therefore \sin B\neq 0$,

$\sqrt{3}\sin A=1+\cos A$,

$\sqrt{3}\sin A-\cos A=1$,

$2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin A-\dfrac{1}{2}\cos A\right)=1$,

$\sin\left(A-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$,

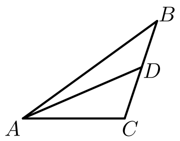
$A-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}$或$A-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5}{6}\pi$,

$A=\dfrac{\pi}{3}$或$A=\pi$（舍），

又$B+C=\pi-A=\dfrac{2}{3}\pi=2A$,

$\therefore B$，A，C为等差数列.

（2）



设BC边中点为D,

由（1）得$A=\dfrac{\pi}{3}$,

$AD=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$,

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$,

$|AB|^2+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+2\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos A=4\left|\overrightarrow{AD}\right|^2$，

$9+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+3\left|\overrightarrow{AC}\right|=13$,

$\left|\overrightarrow{AC}\right|=1$（$-4$舍），

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A$

$=\dfrac{1}{2}\times 3\times 1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

【踩分点】

22. 已知数列$\{a_n\}$满足，$a_1=3$，$a_n=a_{n-1}+2^{n-1}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项.

（2）若$b_n=n(a_n-1)(n\in\mathbf{N}^*)$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$S_n$.

（3）设$c_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$，$T_n=2c_1+2^2c_2+\cdots+2^nc_n(n\in\mathbf{N}^*)$，求证：$\dfrac{2}{15}\leqslant T_n<\dfrac{1}{3}(n\in\mathbf{N}^*)$.

【答案】（1）$a_n=2^n+1$.

（2）$S_n=2+(n-1)2^{n+1}$.

（3）证明见解析.

【解析】（1）将$a_n=a_{n-1}+2^{n-1}$两边同除以2^n得$\dfrac{a_n}{2^n}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a_{n-1}}{2^{n-1}}+\dfrac{1}{2}$，

令$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$，$b_1=\dfrac{a_1}{2}=\dfrac{3}{2}$，

$b_n=\dfrac{1}{2}b_{n-1}+\dfrac{1}{2}$

$b_n-1=\dfrac{1}{2}(b_{n-1}-1)$，

令$c_n=b_n-1$，$c_1=b_1-1=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore c_n$是以$\dfrac{1}{2}$为公比，$\dfrac{1}{2}$为首项的等比数列$c_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$，

$b_n-1=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$，

$\dfrac{a_n}{2^n}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

$a_n=2^n+1$.

（2）$b_n=n\cdot 2^n$，则$S_n=1\times 2+2\times 2^2+\cdots n\times 2^n+0$①，

$2S_n=0+1\times 2^2+\cdots(n-1)\times 2^n+n\times 2^{n+1}$②，

①−②$-S_n=1\times 2+2^2+\cdots 2^n-n\times 2^{n+1}$

$-S_n=1\times 2+\dfrac{2^2\left(2^{n-1}-1\right)}{2-1}-n\times 2^{n+1}$.

$S_n=2+(n-1)2^{n+1}$.

（3）$c_n=\dfrac{1}{(2^n+1)\left(2^{n+1}+1\right)}=\dfrac{1}{2^n}\left(\dfrac{1}{2^n+1}-\dfrac{1}{2^{n+1}+1}\right)$

$2^nc_n=\dfrac{1}{2^n+1}-\dfrac{1}{2^{n+1}+1}$，

$\therefore T_n=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{9}+\cdots\dfrac{1}{2^{n-1}+1}-\dfrac{1}{2^n+1}+\dfrac{1}{2^{n+1}}-\dfrac{1}{2^{n+1}+1}$

$=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2^{n+1}+1}$，

$\because 2^{n+1}+1\geqslant 5$，

$\therefore 0<\dfrac{1}{2^{n+1}+1}\leqslant\dfrac{1}{5}$，

$\dfrac{2}{15}\leqslant T_n=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2^{n+1}+1}<\dfrac{1}{3}$.

【踩分点】