

2020~2021学年四川成都高新区成都市第七中学（高新校区）高二上学期开学考试
理科数学试卷

一、选择题

(本大题共12小题，每小题5分，共60分)

1. $\sin^2 \frac{\pi}{12} - \cos^2 \frac{\pi}{12}$ 的结果是 ().
A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$
2. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_5 = 10$, $a_4 = 7$, 则数列 $\{a_n\}$ 的公差为 ().
A. 2 B. 3 C. 4 D. 1
3. 如果直线 $(2a + 5)x + (a - 2)y + 4 = 0$ 与直线 $(2 - a)x + (a + 3)y - 1 = 0$ 互相垂直, 则 $a =$ ().
A. 2 B. -2 C. 2, -2 D. 2, 0, -2
4. 设 a 、 b 是两条不同的直线, α 是平面, 下列推断错误的是 ().
A. $\left. \begin{matrix} b \perp \alpha \\ a \subset \alpha \end{matrix} \right\} \Rightarrow a \perp b$ B. $\left. \begin{matrix} a // b \\ a \perp \alpha \end{matrix} \right\} \Rightarrow b \perp \alpha$
C. $\left. \begin{matrix} a \perp b \\ b \perp \alpha \end{matrix} \right\} \Rightarrow a // \alpha \text{ 或 } a \subset \alpha$ D. $\left. \begin{matrix} a // \alpha \\ b \subset \alpha \end{matrix} \right\} \Rightarrow a // b$
5. 过点 $M(2, 1)$ 的直线 l 与 x 轴, y 轴分别交于 P , Q 两点, 且 $|MP| = |MQ|$, 则 l 的方程是 ().
A. $x - 2y + 3 = 0$ B. $2x - y - 3 = 0$ C. $2x + y - 5 = 0$ D. $x + 2y - 4 = 0$
6. 设 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < 0$, 则 ().
A. $ab < b^2$ B. $a + b > 2\sqrt{ab}$
C. $a^2 > b^2$ D. $a^2 + b^2 > |a| + |b|$
7. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - 4y + 3 \leq 0 \\ 3x + 5y < 25 \\ x \geq 1 \end{cases}$, 目标函数 $z = 2x + y$, 则 z 的范围 ().
A. $[3, 12]$ B. $(-\infty, 12]$ C. $[3, 12)$ D. $(-\infty, +\infty)$
8. 若过点 $A(4, 0)$ 的直线 l 与曲线 $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ 有公共点, 则直线 l 的斜率的取值范围为 ().

- A. $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ B. $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ C. $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ D. $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$

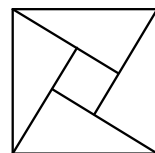
9. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $\frac{S_6}{S_3} = 3$, 则 $\frac{S_9}{S_6} = ()$.

- A. 2 B. $\frac{7}{3}$ C. $\frac{8}{3}$ D. 3

10. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\cos A = \frac{5}{13}$, $\sin B = \frac{3}{5}$, 则 $\cos C$ 的值为 $()$.

- A. $-\frac{16}{65}$ B. $\frac{16}{65}$ C. $\frac{56}{65}$ D. $\frac{16}{65}$ 或 $\frac{56}{65}$

11. “剑桥学派”创始人之一数学家哈代说过: “数学家的造型, 同画家和诗人一样, 也应当是美丽的”: 古希腊数学家毕达哥拉斯创造的“黄金分割”给我们的生活处处带来美; 我国古代数学家赵爽创造了优美“弦图”, “弦图”是由四个全等的直角三角形与一个小正方形拼成的一个大正方形, 如果小正方形的面积为1, 大正方形的面积为25, 直角三角形中较小的锐角为 α , 则 $\sin 2\alpha$ 等于 $()$.



- A. $\frac{24}{25}$ B. $\frac{7}{25}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{3}{5}$

12. 在平面直角坐标系 xOy 中, 圆 $x^2 + y^2 = \frac{n^2}{4}$ 上一动点到直线 $x + \sqrt{3}y + n(n+1) = 0$ 的距离最大值为 a_n , 若数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和 $S_n < m$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是 $()$.

- A. $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$ B. $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ C. $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$ D. $\left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$

二、填空题

(本大题共4小题, 每小题5分, 共20分)

13. 已知 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, 则 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为棱 CC_1 的中点, 则异面直线 AE 与 CD 所成角的余弦值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 3S_n (n \geq 1)$, 则 $a_6 = \underline{\hspace{2cm}}$.

16. 有如下命题:

- ①两两相交且不过同一点的三条直线必在同一平面内；
- ②若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, $BC = 2$, $C = 60^\circ$, 则此三角形是正三角形；
- ③已知 $5x^2y^2 + y^4 = 1$ ($x, y \in \mathbf{R}$), 则 $x^2 + y^2$ 的最小值是1；
- ④已知圆 $C: x^2 + y^2 = 25$, 与 x 轴的左、右交点分别为 A 、 B . 若点 P 在 C 上, 点 Q 在直线 $x = 9$ 上, 且 $|BP| = |BQ|$, $BP \perp BQ$, 则 $\triangle APQ$ 的面积为20.
- 其中正确的结论是 _____ (填上你认为正确的所有序号) .

三、解答题

(本大题共6小题, 共70分)

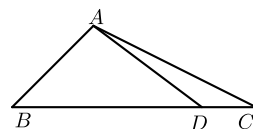
17. 解关于 x 的不等式: $x^2 - (3a + 1)x + a(2a + 1) < 0$.

18. 设 $\{a_n\}$ 是公比不为1的等比数列, a_1 为 a_2, a_3 的等差中项.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的公比.

(2) 若 $a_1 = 1$, 求数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和.

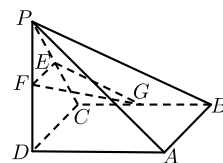
19. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $a = 3, c = \sqrt{2}, B = 45^\circ$.



(1) 求 $\sin C$ 的值.

(2) 在边 BC 上取一点 D , 使得 $\cos \angle ADC = -\frac{4}{5}$, 求 $\tan \angle DAC$ 的值.

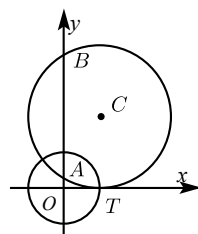
20. 如图所示, 四棱锥 $P - ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为正方形, $PD \perp$ 平面 $ABCD$, $PD = AB = 2$. E, F , G 分别为 PC, PD, BC 的中点.



(1) 求证: $PA \parallel$ 平面 EFG .

(2) 求直线 PA 与平面 PBD 所成角的大小.

21. 如图, 图 C 与 x 轴相切于点 $T(1, 0)$, 与 y 轴正半轴交于两点 A, B (B 在 A 的上方), 且 $|AB| = \frac{3}{2}$.



(1) 求圆 C 的标准方程.

(2) 过点 A 作任一条直线与圆 O , $x^2 + y^2 = 1$ 相交于 M , N 两点, 求证: $\angle MBA = \angle NBA$.

22. 已知数列 $\{a_n\}$ 的相邻两项 a_n , a_{n+1} 是关于 x 的方程 $x^2 - 2^n x + b_n = 0 (n \in \mathbf{N}^*)$ 的两根, 且 $a_1 = 1$.

(1) 求证: 数列 $\left\{a_n - \frac{1}{3} \times 2^n\right\}$ 是等比数列.

(2) 求 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(3) 设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 问是否存在常数 λ , 使得 $b_n - \lambda S_n > 0$ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 都成立, 若存在, 求出 λ 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

高二学生专属学习群



群号：674178520

群内不仅有丰富学习资料，还可以和大家一起交流
欢迎同学扫码加入~~