2020~2021学年四川成都高新区成都市第七中学（高新校区）高二上学期开学考试理科数学试卷(详解)

一、选择题

（本大题共12小题，每小题5分，共60分）

1. $\sin^2\dfrac{\pi}{12}-\cos^2\dfrac{\pi}{12}$的结果是（ ）.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $-\dfrac{1}{2}$

【答案】B

【解析】$\sin^2\dfrac{\pi}{12}-\cos^2\dfrac{\pi}{12}=-\left(\cos^2\dfrac{\pi}{12}-\sin^2\dfrac{\pi}{2}\right)=-\cos\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

故选B.

2. 等差数列$\{a_n\}$中，$a_1+a_5=10$，$a_4=7$，则数列$\{a_n\}$的公差为（ ）.

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 1

【答案】A

【解析】由等差数列的性质可知：$a_1+a_5=2a_3=10$，

$\therefore a_3=5$，$d=a_4-a_3=7-5=2$，

故选A.

3. 如果直线$(2a+5)x+(a-2)y+4=0$与直线$(2-a)x+(a+3)y-1=0$互相垂直，则$a=$（ ）.

A. 2　　B. -2　　C. $2,-2$　　D. $2,0,-2$

【答案】C

【解析】设直线$(2a+5)x+(a-2)y+4=0$为直线M，

直线$(2-a)x+(a+3)y-1=0$为直线N，

①当直线M斜率不存在时，

即直线M的倾斜角为90°，

即$a-2=0$，即$a=2$时，

直线N的斜率为0，即直线N的倾斜角为0°，

所以直线M和直线N互相垂直，即$a=2$时两直线互相垂直，

②当直线M和N的斜率都存在时，$k_M=\dfrac{2a+5}{a-2}$，$k_N=\dfrac{2-a}{a+3}$，

要使两直线互相垂直，即让两直线的斜率相乘为-1，

即$k_M\cdot k_N=\dfrac{2a+5}{a-2}\cdot\dfrac{2-a}{a+3}=-1$，

即$2a+5=a+3$，

即$a=-2$，此时两直线互相垂直，

③当直线N斜率不存在时，

即$a=-3$，此时直线M为$-x-5y+4=0$，

直线N为$5x-1=0$，两直线不垂直，不满足题意，

综上所述，$a=2$或-2，

故选C．

4. 设a、b是两条不同的直线，α是平面，下列推断错误的是（　）．

A. $\left.\begin{matrix} b\perp\alpha \\ a\subset\alpha \end{matrix}\right\}\Rightarrow a\perp b$

B. $\left.\begin{matrix} a//b \\ a\perp\alpha \end{matrix}\right\}\Rightarrow b\perp\alpha$

C. $\left.\begin{matrix} a\perp b \\ b\perp\alpha \end{matrix}\right\}\Rightarrow a//\alpha$或$a\subset\alpha$

D. $\left.\begin{matrix} a//\alpha \\ b\subset\alpha \end{matrix}\right\}\Rightarrow a//b$

【答案】D

【解析】已知a，b是两条不同的直线，α是平面，

对于A项：$\because b\perp\alpha$，

$\therefore$直线b垂直于平面α内的所有直线，

又$\because a\subset\alpha$，

$\therefore a\perp b$，故A正确；

对于B项：$\because a//b$且$a\perp\alpha$，

$\therefore b\perp\alpha$，故B正确；

对于C项：$\because b\perp\alpha$且$a\perp b$，

$\therefore a//\alpha$或$a\subset\alpha$，故C正确；

对于D项：$\because a//\alpha$且$b\subset\alpha$，

$\therefore a//b$或a和b异面或$a\perp b$，故D错误．

故选D．

5. 过点$M(2,1)$的直线l与x轴，y轴分别交于P，Q两点，且$|MP|=|MQ|$，则l的方程是（　）．

A. $x-2y+3=0$　　B. $2x-y-3=0$　　C. $2x+y-5=0$　　D. $x+2y-4=0$

【答案】D

【解析】$\because |MP|=|MQ|$，且M、P、Q三点都在直线上，

$\therefore M$为P、Q的中点，

设直线的截距式为$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$，

则$\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{b}{2}\right)$即$M(2,1)$，

$\therefore a=4$，$b=2$，

即直线方程：$x+2y-4=0$，

故选D．

6. 设$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}<0$，则（　）．

A. $ab<b^2$

B. $a+b>2\sqrt{ab}$

C. $a^2>b^2$

D. $a^2+b^2>|a|+|b|$

【答案】A

【解析】$\because \dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}<0$，

$\therefore b<a<0$，

$\therefore -b>-a>0$，

$\therefore b^2>ab$．

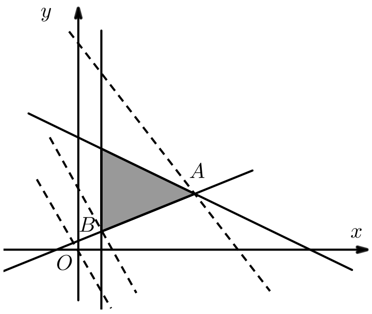
故选A．

7. 设x，y满足约束条件$\begin{cases}x-4y+3\leqslant 0\\3x+5y<25\\x\geqslant 1\end{cases}$，目标函数$z=2x+y$，则$z$的范围（　）．

A. $[3,12]$　　B. $(-\infty,12]$　　C. $[3,12)$　　D. $(-\infty,+\infty)$

【答案】C

【解析】如图：作出可行域：



目标函数：$z=2x+y$，则$y=-2x+z$，

由$\begin{cases}x-4y+3=0\\3x+5y=25\end{cases}$，

得$A(5,2)$，

由$\begin{cases}x-4y+3=0\\x=1\end{cases}$，

得$B(1,1)$，

当直线$z=2x+y$过点$A(5,2)$时，z最大是12，

当直线$z=2x+y$过点$B(1,1)$，z最小是3，

故选C．

8. 若过点$A(4,0)$的直线l与曲线$(x-2)^2+y^2=1$有公共点，则直线l的斜率的取值范围为（　）．

A. $\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$　　B. $\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$　　C. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$　　D. $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

【答案】D

【解析】设过点A的直线l的方程为$y=k(x-4)$，

则圆$(x-2)^2+y^2=1$的圆心$(2,0)$到该直线的距离$d=\frac{|2k|}{\sqrt{k^2+1}}\leqslant 1$，

解之得$k\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$，故选D．

9. 设等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$\frac{S_6}{S_3}=3$，则$\frac{S_9}{S_6}=$（　）．

A. 2　　B. $\frac{7}{3}$　　C. $\frac{8}{3}$　　D. 3

【答案】B

【解析】方法一：由$\{a_n\}$是等比数列知，S_3，S_6-S_3，S_9-S_6是等比数列，

即S_3，$2S_3$，S_9-3S_3成等比数列，

故$(S_9-3S_3)S_3=(2S_3)^2$，

从而$S_9=7S_3$.

$\dfrac{S_9}{S_6}=\dfrac{7}{3}$.

故选B.

方法二：设公比为q,

则$\dfrac{S_6}{S_3}=\dfrac{(1+q^3)S_3}{S_3}=1+q^3=3\Rightarrow q^3=2$,

于是$\dfrac{S_9}{S_6}=\dfrac{(1+q^3+q^6)S_3}{(1+q^3)S_3}=\dfrac{1+q^3+q^6}{1+q^3}=\dfrac{1+2+4}{1+2}=\dfrac{7}{3}$.

故选B.

10. 在$\triangle ABC$中，已知$\cos A=\dfrac{5}{13}$，$\sin B=\dfrac{3}{5}$，则$\cos C$的值为（ ）.

A. $-\dfrac{16}{65}$　　B. $\dfrac{16}{65}$　　C. $\dfrac{56}{65}$　　D. $\dfrac{16}{65}$或$\dfrac{56}{65}$

【答案】B

【解析】$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\dfrac{5}{13}\right)^2}=\dfrac{12}{13}$,

由$\sin A>\sin B$及正弦定理，大边对大角得到B为锐角，

则$\cos B=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{4}{5}$,

则$\cos C=\cos[\pi-(A+B)]$

$=-\cos(A+B)$

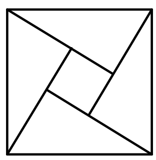
$=-\cos A\cos B+\sin A\sin B$

$=-\dfrac{5}{13}\times\dfrac{4}{5}\times\dfrac{12}{13}\times\dfrac{3}{5}$,

所以$\cos C=\dfrac{16}{65}$.

故选B.

11. “剑桥学派”创始人之一数学家哈代说过：“数学家的造型，同画家和诗人一样，也应当是美丽的”：古希腊数学家毕达哥拉斯创造的”黄金分割”给我们的生活处处带来美；我国古代数学家赵爽创造了优美”弦图”，”弦图”是由四个全等的直角三角形与一个小正方形拼成的一个大正方形，如果小正方形的面积为1，大正方形的面积为25，直角三角形中较小的锐角为α，则$\sin 2\alpha$等于（ ）.



A. $\dfrac{24}{25}$　　B. $\dfrac{7}{25}$　　C. $\dfrac{4}{5}$　　D. $\dfrac{3}{5}$

【答案】A

【解析】设直角三角形的两条直角边中较短的边为a，较长的边为b，即$a<b$，

因为大正方形的面积为25，小正方形的面积为1，

所以大正方形的边长为5，

由勾股定理可知$a^2+b^2=25$，

每个直角三角形的面积为$\dfrac{1}{4}\times(25-1)=6$，

所以$\dfrac{1}{2}ab=6$，

则$\begin{cases}a^2+b^2=25\\ \dfrac{1}{2}ab=6\end{cases}$，解方程组可得$\begin{cases}a=3\\ b=4\end{cases}$，

所以$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$，

由正弦的二倍角公式可知$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{24}{25}$.

故选A.

12. 在平面直角坐标系xOy中，圆$x^2+y^2=\dfrac{n^2}{4}$上一动点到直线$x+\sqrt{3}y+n(n+1)=0$的距离最大值为a_n，若数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$的前$n$项和$S_n<m$恒成立，则实数$m$的取值范围是（　）.

A. $\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$　　B. $\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$　　C. $\left[\dfrac{3}{4},+\infty\right)$　　D. $\left(\dfrac{3}{4},+\infty\right)$

【答案】A

【解析】圆上动点到直线距离的最大值为圆心到直线的距离与圆的半径之和，

而圆$x^2+y^2=\dfrac{n^2}{4}$的圆心$(0,0)$到直线$x+\sqrt{3}y+n(n+1)=0$的距离为：

$$d=\frac{|n(n+1)|}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$\therefore a_n=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n}{2}=\frac{n^2+2n}{2},$$

$$\therefore \frac{1}{a_n}=\frac{2}{n^2+2n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2},$$

$$\therefore S_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}$$

$$=\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right]$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)<\frac{3}{2},$$

$$\therefore m\geqslant\frac{3}{2}.$$

故选：A．

二、填空题

（本大题共4小题，每小题5分，共20分）

13. 已知$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，则$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=$______ .

【答案】$\frac{1}{7}$

【解析】$\because\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，

$\therefore\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4}$，

$$\begin{aligned}&\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\\=&\frac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}}\\=&\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}\\=&\frac{-\frac{3}{4}+1}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)}\\=&\frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{4}}\\=&\frac{1}{7}.\end{aligned}$$

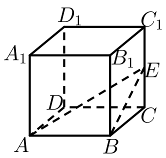
故答案为$\frac{1}{7}$.

【踩分点】

14. 在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E为棱CC_1的中点，则异面直线AE与CD所成角的余弦值为______ .

【答案】$\frac{2}{3}$

【解析】如下图所示，设正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为2，



$\because$四边形$ABCD$为正方形，所以，$AB//CD$，

所以异面直线AE与CD所成的角为$\angle BAE$，

在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB\perp$平面BB_1C_1C，$BC\subset$平面BB_1C_1C，

$\therefore AB\perp BE$，$AB=2$，$BE=\sqrt{BC^2+CE^2}=\sqrt{5}$，

$\therefore AE=\sqrt{AC^2+CE^2}=3$，

在$\mathrm{Rt}\triangle ABE$中，$\angle ABE=90^\circ$，$\cos\angle BAE=\dfrac{AB}{AE}=\dfrac{2}{3}$，

因此，异面直线AE与CD所成角的余弦值为$\dfrac{2}{3}$.

【踩分点】

15. 数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_1=1$，$a_{n+1}=3S_n(n\geqslant 1)$，则$a_6=$ ______ .

【答案】768

【解析】方法一：$a_2=3S_1=3$，$a_3=3S_2=12$，$a_4=3S_3=48$，$a_5=3S_4=192$，

$a_6=3S_5=768$.

方法二：由$a_{n+1}=3S_n$，得到$a_n=3S_{n-1}(n\geqslant 2)$，

两式相减得：$a_{n+1}-a_n=3(S_n-S_{n-1})=3a_n$，

则$a_{n+1}=4a_n(n\geqslant 2)$，又$a_1=1$，$a_2=3S_1=3a_1=3$，

得到此数列除法去第一项后，为首项是3，公比为4的等比数列，

$\therefore a_n=a_2q^{n-2}=3\times 4^{n-2}(n\geqslant 2)$.

则$a_6=3\times 4^4=768$.

故答案为：768.

【踩分点】

16. 有如下命题：

①两两相交且不过同一点的三条直线必在同一平面内；

②若$\triangle ABC$的面积为$\sqrt{3}$，$BC=2$，$C=60^\circ$，则此三角形是正三角形；

③已知$5x^2y^2+y^4=1$（x，$y\in\mathbf{R}$），则x^2+y^2的最小值是1；

④已知圆$C:x^2+y^2=25$，与x轴的左、右交点分别为A、B.若点P在C上，点Q在直线$x=9$上，且$|BP|=|BQ|$，$BP\perp BQ$，则$\triangle APQ$的面积为20.

其中正确的结论是 ______ （填上你认为正确的所有序号）.

【答案】①②④

【解析】对于①，由题意：不妨设两两相交且不过同一点的三条直线的交点分别为A，B，C，那在证明过三条直线在同一个平面α内，

因为点A不在直线BC上，所以过点A和直线BC可确定平面α，

因为$A\in\alpha$，$B\in\alpha$，$C\in\alpha$，

所以$AB\subset\alpha$，$AC\subset\alpha$，$BC\subset\alpha$，

所以AC，BC，AC三直线在同一平面内，

所以两两相交且不过同一点的三条直线必在同一平面内，故①正确；

对于②：因为$\triangle ABC$的面积为$\sqrt{3}$，$BC=2$，$C=60^\circ$，

所以$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times BC\times AC\times\sin C=\dfrac{1}{2}\times 2\times AC\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，

所以$AC=2$，因为$BC=2$且$C=60^\circ$，所以$\triangle ABC$为正三角形，故②正确；

对于③：因为$5x^2y^2+y^4=1$，所以$y^2(5x^2+y^2)=1$，

则$4=4y^2(5x^2+y^2)\leqslant\dfrac{(4y^2+5x^2+y^2)^2}{2}=\dfrac{25}{4}(x^2+y^2)^2$，

可得$(x^2+y^2)^2\geqslant\dfrac{16}{25}$，所以$x^2+y^2\geqslant\dfrac{4}{5}$，

当且仅当$5x^2+y^2=4y^2$时等号成立，即当$x^2=\dfrac{3}{10}$，$y^2=\dfrac{1}{2}$时，x^2+y^2取到最小值$\dfrac{4}{5}$，故③不正确；

对于④：因为A，B两点分别为圆$C:x^2+y^2=25$与x轴的左、右交点，

所以可得$A(-5,0)$，$B(5,0)$，

设$P(x_P,y_P)$，$Q(9,y_Q)$，根据对称性可设$y_Q>0$，由题意知$y_P>0$，

则直线BQ的斜率为$k_{BQ}=\dfrac{y_Q-0}{9-5}=\dfrac{y_Q}{4}$，

因为$BP\perp BQ$，所以$k_{BP}\cdot k_{BQ}=-1$，所以$k_{BP}=-\dfrac{4}{y_Q}$，

所以直线BP的方程为$y=-\dfrac{4}{y_Q}(x-5)$，

因为点P在直线BP上，所以$y_P=-\dfrac{4}{y_Q}(x_P-5)$，

所以$x_P-5=-\dfrac{y_P\cdot y_Q}{4}$，

所以$|BP|=\sqrt{(x_P-5)^2+y_P^2}=\sqrt{\left(-\dfrac{y_P\cdot y_Q}{4}\right)^2+y_P^2}$

$=\sqrt{\dfrac{y_P^2y_Q^2+16y_P^2}{16}}=\sqrt{\dfrac{y_P^2(y_Q^2+16)}{16}}=\dfrac{y_P}{4}\sqrt{16+y_Q^2}$，

又因为$|BQ|=\sqrt{(9-5)^2+y_Q^2}=\sqrt{16+y_Q^2}$，

因为$|BP|=|BQ|$，所以$\dfrac{y_P}{4}\sqrt{16+y_Q^2}=\sqrt{16+y_Q^2}$，解得$y_P=4$，

因为点$P(x_P,y_P)$在圆$x^2+y^2=25$上，所以$x_P^2+y_P^2=25$，

即$x_P^2+16=25$，所以$x_P^2=9$，解得$x_P=3$或$x_P=-3$，

当$x_P=3$，$y_P=4$时，代入直线$BP:y=-\dfrac{4}{y_Q}(x-5)$，

则$4=-\dfrac{4}{y_Q}(3-5)$，解得$y_Q=2$，此时点$Q(9,2)$，

当$x_P=-3$，$y_P=4$时，代入直线$BP:y=-\dfrac{4}{y_Q}(x-5)$，

则$4=-\dfrac{4}{y_Q}(-3-5)$，解得$y_Q=8$，此时点$Q(9,8)$，

所以点P，Q的坐标分别为$P_1(3,4)$，$Q_1(9,2)$；$P_2(-3,4)$，$Q_2(9,8)$，

所以当P，Q坐标分别为$P_1(3,4)$，$Q_1(9,2)$时，

$|P_1Q_1|=\sqrt{(9-3)^2+(2-4)^2}=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$，

直线P_1Q_1的方程为$y-4=\dfrac{2-4}{9-3}(x-3)$，即$y-4=-\dfrac{1}{3}(x-3)$，

即$y-4=-\dfrac{1}{3}x+1$，即$y=-\dfrac{1}{3}x+5$，即$x+3y-15=0$，

所以点$A(-5,0)$到直线P_1Q_1的距离为：

$d_1=\dfrac{|-5-15|}{\sqrt{1+3^2}}=\dfrac{20}{\sqrt{10}}=\dfrac{20\sqrt{10}}{10}=2\sqrt{10}$，

所以$\triangle AP_1Q_1$的面积为$S_1=\dfrac{1}{2}\times|P_1Q_1|\times d_1=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{10}\times 2\sqrt{10}=20$，

当P、Q坐标分别为$P_2(-3,4)$，$Q_2(9,8)$时，

$|P_2Q_2|=\sqrt{(9+3)^2+(8-4)^2}=\sqrt{12^2+4^2}=\sqrt{144+16}=\sqrt{160}=4\sqrt{10}$，

直线P_2Q_2的方程为$y-4=\dfrac{8-4}{9+3}(x+3)$，即$y-4=\dfrac{1}{3}(x+3)$，

即$y-4=\dfrac{1}{3}x+1$，即$y=\dfrac{1}{3}x+5$，即$x-3y+15=0$，

所以点$A(-5,0)$到直线P_2Q_2的距离为：

$d_2=\dfrac{|-5+15|}{\sqrt{1+(-3)^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$，

所以$\triangle AP_2Q_2$的面积为$S_2=\dfrac{1}{2}\times|P_2Q_2|\times d_2=\dfrac{1}{2}\times 4\sqrt{10}\times\sqrt{10}=20$，

综上所述，$\triangle APQ$的面积为20，故④正确.

故答案为：①②④.

【踩分点】

三、解答题

（本大题共6小题，共70分）

17. 解关于x的不等式：$x^2-(3a+1)x+a(2a+1)<0$.

【答案】$a < -1$时，解集为$(2a+1, a)$，

$a=-1$时，解集为$\varnothing$，

$a>-1$时，解集为$(a, 2a+1)$．

【解析】原式不等式可化为$[x-(2a+1)](x-a)<0$，

（1）若$2a+1<a$，即$a < -1$时，

不等式解集为：$(2a+1, a)$；

（2）若$2a+1=a$，即$a=-1$时，

不等式解集为$\varnothing$；

（3）若$2a+1>a$，即$a>-1$时，

不等式的解集为：$(a, 2a+1)$；

综上可得：$a < -1$时，解集为$(2a+1, a)$，

$a=-1$时，解集为$\varnothing$，

$a>-1$时，解集为$(a, 2a+1)$．

【踩分点】

18. 设$\{a_n\}$是公比不为1的等比数列，a_1为a_2，a_3的等差中项．

（1）求$\{a_n\}$的公比．

（2）若$a_1=1$，求数列$\{na_n\}$的前n项和．

【答案】（1）-2．

（2）$\frac{1}{9}-\frac{(3n+1)(-2)^n}{9}$．

【解析】（1）设$\{a_n\}$的公比为q，由题设得$2a_1=a_2+a_3$，即$2a_1=a_1q+a_1q^2$，

所以$q^2+q-2=0$，解得$q=1$（舍去），$q=-2$．

故$\{a_n\}$的公比为-2．

（2）记S_n为$\{na_n\}$的前n项和．由（1）及题设可得，$a_n=(-2)^{n-1}$，所以

$S_n=1+2\times(-2)+\cdots+n\times(-2)^{n-1}$，

$-2S_n=-2+2\times(-2)^2+\cdots+(n-1)\times(-2)^{n-1}+n\times(-2)^n$，

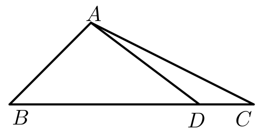
可得$3S_n=1+(-2)+(-2)^2+\cdots+(-2)^{n-1}-n\times(-2)^n$

$=\frac{1-(-2)^n}{3}-n\times(-2)^n$，

所以$S_n=\frac{1}{9}-\frac{(3n+1)(-2)^n}{9}$.

【踩分点】

19. 在$\triangle ABC$中，角A，B、C的对边分别为a，b，c，已知$a=3$，$c=\sqrt{2}$，$B=45^\circ$.



（1）求$\sin C$的值.

（2）在边BC上取一点D，使得$\cos\angle ADC=-\frac{4}{5}$，求$\tan\angle DAC$的值.

【答案】（1）$\frac{\sqrt{5}}{5}$.

（2）$\frac{2}{11}$.

【解析】（1）由余弦定理，得$\cos B=\cos 45^\circ=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{11-b^2}{6\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

因此$b^2=5$，即$b=\sqrt{5}$，

由正弦定理$\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}$，

得$\frac{\sqrt{2}}{\sin C}=\frac{\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$，

因此$\sin C=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

（2）因为$\cos\angle ADC=-\frac{4}{5}$，

所以$\sin\angle ADC=\sqrt{1-\cos^2\angle ADC}=\frac{3}{5}$，

因为$\angle ADC\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，

所以$C\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

所以$\cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

所以$\sin\angle DAC=\sin(\pi-\angle DAC)$

$=\sin(\angle ADC+\angle C)$

$=\sin\angle ADC\cos C+\cos\angle ADC\sin C$

$=\frac{2\sqrt{5}}{25}$，

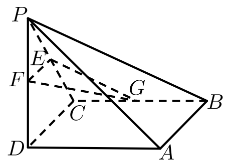
因为$\angle DAC\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

所以$\cos\angle DAC=\sqrt{1-\sin^2\angle DAC}=\frac{11\sqrt{5}}{25}$，

故$\tan\angle DAC=\dfrac{\sin\angle DAC}{\cos\angle DAC}=\dfrac{2}{11}$.

【踩分点】

20. 如图所示，四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为正方形，$PD\perp$平面$ABCD$，$PD=AB=2$．E，F，G分别为PC、PD、BC的中点．



（1） 求证：$PA//$平面EFG．

（2） 求直线PA与平面PBD所成角的大小．

【答案】（1）证明见解析．

（2） 30°．

【解析】（1）因为E、F、G分别为PC、PD、BC的中点，

所以$EF//CD$，$EG//PB$，

因为$CD//AB$，

所以$EF//AB$，

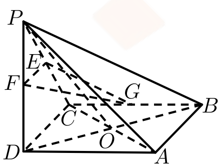
因为$PB\cap AB=B$，$EF\cap EG=E$，

所以平面$EFG//$平面PAB，

因为$PA\subset$平面PAB，

所以$PA//$平面EFG．

（2） 连接AC，BD交于点O，连接PO，$ABCD$为正方形，



$\therefore PD\perp$平面$ABCD$，

$\therefore PD\perp DA$，$PD\perp DO$，

$\therefore PA=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，

$PO=\sqrt{2^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{6}$，

$OA=\sqrt{2}$，

易知$\angle APO$为PA与PBD所成的角，

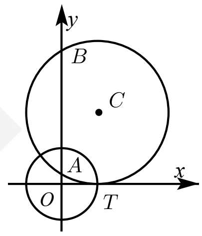
$\cos\angle APO=\dfrac{PA^2+PO^2-OA^2}{2PA\cdot PO}=\dfrac{8+6-2}{2\times2\sqrt{2}\times\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore\angle APO=30^\circ$，

即PA与平面PBD所成的角为30°．

【踩分点】

21. 如图，图C与x轴相切于点$T(1,0)$，与y轴正半轴交于两点A，B（B在A的上方），且$|AB|=\dfrac{3}{2}$．



（1）求圆C的标准方程．

（2）过点A作任一条直线与圆O，$x^2+y^2=1$相交于M，N两点，求证：$\angle MBA=\angle NBA$．

【答案】（1）$(x-1)^2+\left(y-\dfrac{5}{4}\right)^2=\dfrac{25}{16}$．

（2）证明见解析．

【解析】（1）设圆C的半径为$r(r>0)$，根据题意可知：

圆心C坐标为$(1,r)$，$|AB|$为圆C的弦，弦长为$\dfrac{3}{2}$，

C到AB所在直线，也即y轴的距离$d=1$，

$\therefore r^2=d^2+\left(\dfrac{|AB|}{2}\right)^2=1^2+\dfrac{9}{16}=\dfrac{25}{16}$，

$\therefore r=\dfrac{5}{4}$，圆心$C$坐标为$\left(1,\dfrac{5}{4}\right)$，

$\therefore$圆C方程为$(x-1)^2+\left(y-\dfrac{5}{4}\right)^2=\dfrac{25}{16}$．

（2）将$x=0$代入圆C的方程有：

$1+\left(y-\dfrac{5}{4}\right)^2=\dfrac{25}{16}$，解得$y=\dfrac{1}{2}$或$2$，

即$A\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，$B(0,2)$，

①当$MN\perp y$轴时，由圆的对称轴可知：$\angle NBA=\angle MBA$；

②当MN与y轴不垂直时，可设MN的方程$y=kx+\dfrac{1}{2}$，

联立圆O与MN的方程：$\begin{cases}y=kx+\dfrac{1}{2}\\x^2+y^2=1\end{cases}$，

消去y可得：$(4k^2+4)x^2+4kx-3=0$，（A为圆O内一点，必有两交点），

设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

则$x_1+x_2=\dfrac{-k}{k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{-3}{4k^2+4}$，

$$\therefore k_{BM}+k_{BN}=\frac{y_1-2}{x_1}+\frac{y_2-2}{x_2}=\frac{kx_1-\frac{3}{2}}{x_1}+\frac{kx_2-\frac{3}{2}}{x_2}$$
$$=\frac{4kx_1x_2-3(x_1+x_2)}{2x_1x_2}$$
$$=\frac{-12k}{4k^2+4}+\frac{3k}{k^2+1}$$
$$=0,$$

即$k_{BM}=-k_{BN}$，$\angle NBA=\angle MBA$，得证.

【踩分点】

22. 已知数列$\{a_n\}$的相邻两项a_n，a_{n+1}是关于x的方程$x^2-2^nx+b_n=0(n\in\mathbf{N}^*)$的两根，且$a_1=1$.

（1）求证：数列$\left\{a_n-\dfrac{1}{3}\times 2^n\right\}$是等比数列.

（2）求$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的通项公式.

（3）设S_n是数列$\{a_n\}$的前n项和，问是否存在常数λ，使得$b_n-\lambda S_n>0$对任意$n\in\mathbf{N}^*$都成立，若存在，求出λ的取值范围；若不存在，请说明理由.

【答案】（1）证明见解析.

（2）$a_n=\dfrac{1}{3}\left[2^n-(-1)^{n-1}\right]$，

$b_n=\dfrac{1}{9}\left[2^{2n+1}-(-2)^n-1\right]$.

（3）$(-\infty,1)$.

【解析】（1）$\because a_n$，a_{n+1}是关于x的方程$x^2-2^nx+b_n=0(n\in\mathbf{N}^*)$的两实根，

$$\therefore\begin{cases}a_n+a_{n+1}=2^n\\ b_n=a_na_{n-1}\end{cases},$$

$$\because\frac{a_{n+1}-\frac{1}{3}\times 2^{n+1}}{a_n-\frac{1}{3}\times 2^n}=\frac{2^n-a_n-\frac{1}{3}\times 2^{n+1}}{a_n-\frac{1}{3}\times 2^n}=\frac{-\left(a_n-\frac{1}{3}\times 2^n\right)}{a_n-\frac{1}{3}\times 2^n}=-1,$$

故数列$\left\{a_n-\dfrac{1}{3}\times 2^n\right\}$是首项为$a_1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$，公比为$-1$的等比数列.

（2）方法一：由（1）知：$a_n=\dfrac{1}{3}\cdot 2^n+\dfrac{1}{3}\cdot(-1)^{n-1}$，

解得：$a_n=\dfrac{1}{3}\left[2^n-(-1)^{n-1}\right]$，

所以：$b_n=a_na_{n+1}=\dfrac{1}{9}\left[2^{2n+1}-(-2)^n-1\right]$.

方法二：由$a_n+a_{n+1}=2^n$，两边同除以$(-1)^{n+1}$，得$\frac{a_{n+1}}{(-1)^{n+1}}-\frac{a_n}{(-1)^n}=-(-2)^n$

，

令$c_n=\frac{a_n}{(-1)^n}$，则$c_{n+1}-c_n=-(-2)^n$，

故$c_n=c_1+(c_2-c_1)+(c_3-c_2)+\cdots+(c_n-c_{n-1})$

$=-1-(-2)-(-2)^2-(-2)^3-\cdots-(-2)^{n-1}$

$=-1-\frac{(-2)\cdot\left[1-(-2)^{n-1}\right]}{1-(-2)}=\frac{1}{3}[(-2)^n-1](n\geqslant 2)$，

且$c_1=\frac{a_1}{-1}=-1$也适合上式，

$\therefore\frac{a_n}{(-1)^n}=\frac{1}{3}[(-2)^n-1]$，即$a_n=\frac{1}{3}[2^n-(-1)^n]$，

$\therefore b_n=a_na_{n+1}=\frac{1}{3}[2^n-(-1)^n]\times\frac{1}{3}\left[2^{n+1}-(-1)^{n+1}\right]$

$=\frac{1}{9}\left[2^{2n+1}-(-2)^n-1\right]$．

（3）$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{1}{3}\left[\left(2+2^2+\cdots+2^n-(-1)-(-1)^2-\cdots-(-1)^n\right)\right]$

$=\frac{1}{3}\left(2^{n+1}-2-\frac{(-1)^n-1}{2}\right)$，

假设只存在实数λ使得$b_n>\lambda S_n$对任意的$n\in\mathbf{N}$都成立，

则：只需满足$\frac{1}{9}\left(2^{n+1}-1\right)(2^n+1)>\frac{\lambda}{3}\left(2^{n+1}-2-\frac{(-1)^n-1}{2}\right)$即可，

①当n为正奇数时，$\frac{1}{9}\left(2^{n+1}-1\right)(2^n+1)-\frac{\lambda}{3}\left(2^{n+1}-1\right)>0$，

由于$2^{n+1}-1>0$，

所以：$\lambda<\frac{1}{3}(2^n+1)$对任意的正奇数都成立，

则：当$n=1$时，$\frac{1}{3}(2^n+1)-1$，

则：$\lambda<1$；

②当n为正偶数时，$\frac{1}{9}\left(2^{n+1}-1\right)(2^n+1)-\frac{2\lambda}{3}(2^n-1)>0$，

由于$2^n-1>0$，

则：$\lambda<\frac{1}{6}\left(2^{n+1}+1\right)$对任意的正偶数都成立，

所以：$\frac{1}{6}\left(2^{n+1}+1\right)$的最小值为$\frac{3}{2}$，

所以：$\lambda<\frac{3}{2}$，

由①②得：$\lambda<1$，

故存在实数λ，使得$b_n>\lambda S_n$对任意的$n\in\mathbf{N}$都成立，λ的范围为：$(-\infty,1)$．

【踩分点】